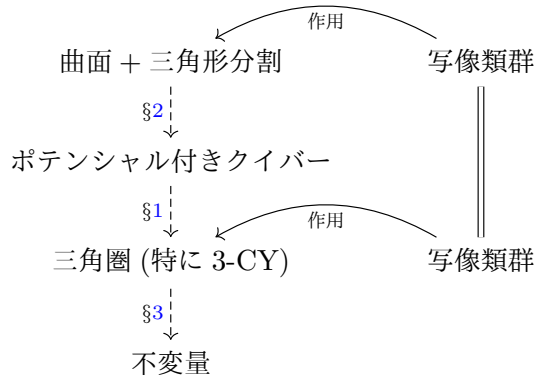


写像類群の三角圏への作用

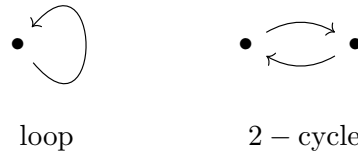
狩野隼輔 *

出てくる用語はなんだか難しそうですが, 名前だけで大したことはありません. 次のような図式をイメージして研究しています:



1 ポテンシャル付きクイバーと 3 次元カラビ-ヤウ圏

クイバーとは有向グラフのことですが, ここでは諸事情によりループと長さ 2 のサイクルを持たないものとしします.



クイバー $Q = (Q_0, Q_1) = (\text{頂点の集合}, \text{矢の集合})$ に対し, その道全体で生成される体 k 上の代数を道代数と呼び, kQ と書きます. ただし, 道の積は, 終点と始点と同じ場合には繋げて, 違う場合は 0 としています. クイバーのポテンシャル $W \in kQ$ とは, Q の幾つかのサイクルの k 上の線形結合のことで, その対 (Q, W) をポテンシャル付きクイバーと呼びます. (このポテンシャルは, 次の意味では Q 上の関係式の生成元のような役割を果たします.)

Q の矢 x に対し, $\partial_x W$ を, W に含まれる各サイクル $a_1 a_2 \cdots a_l$ に対し,

$$\partial_x(a_1 a_2 \cdots a_l) = \sum_{i=1}^l \delta_{x, a_i} a_{i+1} \cdots a_l a_1 \cdots a_{i-1}$$

で定め, $J_{Q,W} = kQ / \langle \partial_a W \mid a \in Q_1 \rangle$ を Jacobi 代数と呼びます.

さらに (Q, W) に対し, Ginzburg dg 代数と呼ばれる dg 代数 $\Gamma_{Q,W}$ を定めることができ, これは特に, $H^0(\Gamma_{Q,W}) = J_{Q,W}$ となっています. この Ginzburg dg 代数が本稿の主役となります.

$\Gamma_{Q,W}$ 上の dg 加群の圏の導来圏を $\mathcal{D}_{Q,W}$ と書くことにします. この圏は, 次のような非常に良い性質を持ちます:

定理 1.1 ([KVdB, Theorem 6.3.])

$\mathcal{D}_{Q,W}$ は 3 次元 Calabi-Yau 圏である. すなわち, 任意の $M, N \in \mathcal{D}_{Q,W}$ に対し,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_{Q,W}}(M, N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}_{Q,W}}(N, M[3])^\vee$$

* 東京工業大学理工学研究科数学専攻修士 2 年, E-mail : kano.s.ab@m.titech.ac.jp

ここで, $(-)^{\vee}$ は k -双対 $\text{Hom}_k(-, k)$ のこと

ところで, クイバー Q に対し, ミューテーションと呼ばれる操作があります.

定義 1.2 (クイバーのミューテーション)

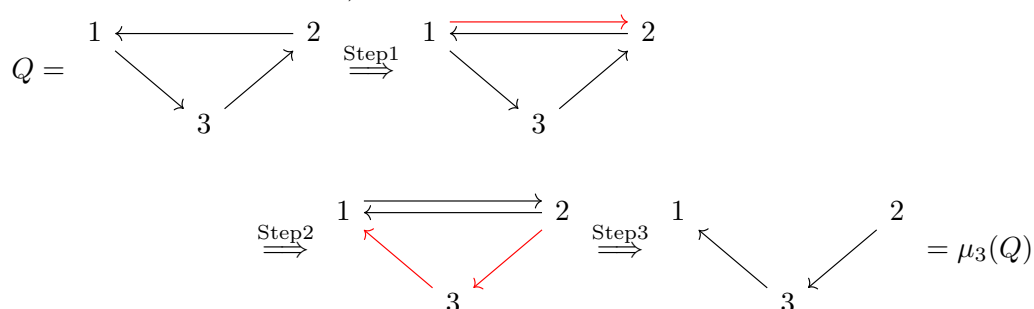
$i \in Q_0$ に対し, i に於いてミューテーションして得られたクイバー $\mu_i(Q)$ とは, 次の 3 ステップで定義されるクイバーのこと:

Step1. k を通る長さ 2 の path に対し, その合成を加える.

Step2. k に隣接する全ての矢の向きを入れ替える.

Step3. 長さ 2 の cycle を全て取り除く.

例 1.3 (頂点 3 でのミューテーション)



ポテンシャル付きクイバー (Q, W) に対しても, 各頂点 $i \in Q_0$ に対するミューテーションが定義されています. 頂点 i でミューテーションしたポテンシャル付きクイバーを $(\mu_i Q, \mu_i W)$ と書くことにします. 実はこの二つには次のような関係があります:

定理 1.4 ([KY, Theorem 3.2.])

ミューテーションから誘導される Ginzburg dg 代数間の導来同値*1が存在する:

$$\Phi_i : \mathcal{D}_{\mu_i Q, \mu_i W} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{Q, W}$$

2 曲面の三角形分割とクイバー

次は打って変わって曲面 S と, S 上の点の有限集合 $M \subset S$ の対を考えます.

(S, M) の三角形分割 Δ とは, 端点を M に持つ S 内の単純曲線 (辺と呼ぶ) の集合で, 任意の 2 辺は端点以外で交わらず, $S \setminus \bigcup \Delta$ の各連結成分は頂点を M に持つ三角形になっているもののことです. 三角形分割 Δ の辺 $i \in \Delta$ におけるフリップ $f_i(\Delta)$ とは, $\Delta \setminus i$ を含む三角形分割のうち, Δ とは異なるもののこととします. (図 2 参照)

このフリップは三角形分割の取り換えのうち最も基本的な操作で, 特に次が言えます:

定理 2.1 ([FST])

任意の二つの三角形分割は (辺のラベルを除いて) フリップの列で移り合うことができる.

$\text{MCG}(S, M)$ を, M を集合として保つような写像類群とします. $[\psi] \in \text{MCG}(S, M)$ を曲面に作用させることで三角形分割の各辺は引きずられて変化し, 新しい三角形分割 $\psi(\Delta)$ を得ることができます.

*1 正確にはこの導来同値は二種類 $\Phi_{i,\pm}$ あり (“符号” と呼ぶことにする), その差は i に対応する単純加群 S_i による spherical twist になる: $T_{S_i} \circ \Phi_{i,-} = \Phi_{i,+}$

定理 2.1 より, フリップの列 $f_\psi = (f_{i_1}, \dots, f_{i_r})$ を用いて $f_\psi(\Delta) := f_{i_r} \circ \dots \circ f_{i_1}(\Delta)$ は $\psi(\Delta)$ と同じ三角形分割にすることができます. さらに, 辺のラベルの入れ替え φ を施すことで真に同じ三角形分割にすることができます: $\varphi(f_\psi(\Delta)) = \psi(\Delta)$

例 2.2 (4 点球面)

S として 2 次元球面, M としてその上の異なる 4 点を選んだとき, その三角形分割は, 例えば図 1 の左上のようにできる. これを同図の赤線に添って half twist (つまり, 赤線内の 2 点を反時計回りに入れ替え) をすると, 各辺が引きずられて図 1 の右上のようにになる. この図は, 辺 2,6 についてフリップすることも得られ, それが図 1 の下である. (球面なので, 下の辺 6' は裏を回って右上の辺 1 にできることに注意されたい.) ところが, 辺のラベルが異なる. その入れ替えを下から右上に向かう矢印が意味している.

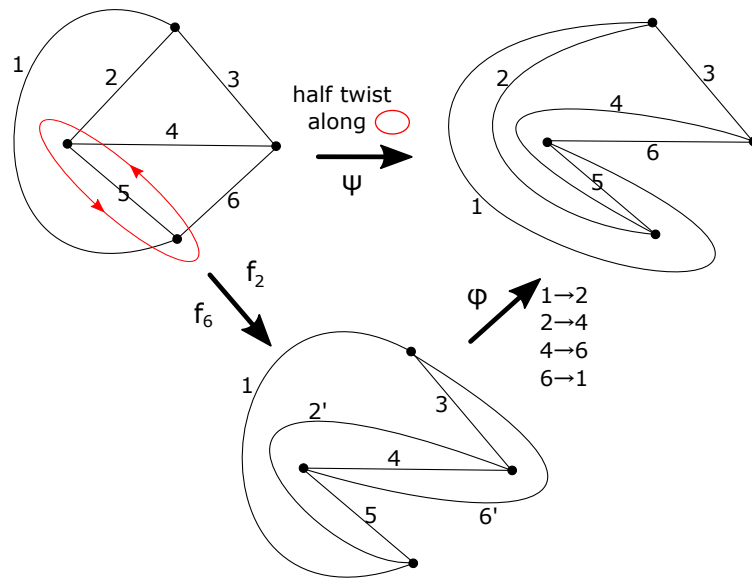


図 1 4 点球面の三角形分割

さて, ここまでの三角形分割やそのフリップの話は 1 節とは独立しているように見えますが, 実は密接に関係しています.

三角形分割 Δ に対してクイバー Q^Δ を, $(Q^\Delta)_0 := \Delta$, 矢を各三角形に長さ 3 のサイクルを曲面の向きに沿うように与えると, 三角形分割のフリップはクイバーのミューテーションに対応しています:

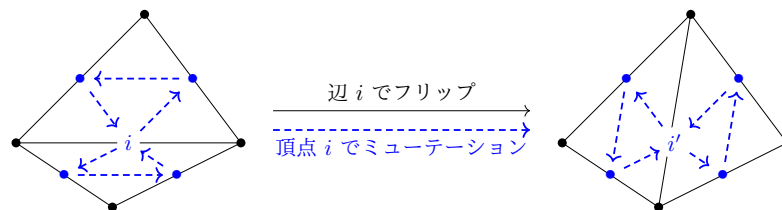


図 2 フリップとミューテーションの対応

また, 各三角形分割 Δ に対して Q^Δ のポテンシャル W^Δ を, 次が成立するように与えることができます*2:

$$\begin{array}{ccc}
 (Q^\Delta, W^\Delta) & \xrightarrow{\text{mutation}} & (\mu_i Q^\Delta, \mu_i W^\Delta) \\
 & \searrow \text{flip} & \parallel \\
 & & (Q^{f_i(\Delta)}, W^{f_i(\Delta)})
 \end{array}$$

*2 クイバーだけではどこに面が貼ってあってどこに穴が空いているのかわからないが, ポテンシャルは面の情報を与えていると言える. また, 技術的には acyclic でないクイバーに対してクイバーの表現論を展開しやすくするための緩衝材のような役割を果たしている.

簡単のため、 $\mathcal{D}_{Q^\Delta, W^\Delta}$ を \mathcal{D}^Δ と書くことにします。

フリップ f_i に対し、 $(Q^{f_i(\Delta)}, W^{f_i(\Delta)})$ と (Q^Δ, W^Δ) は (三角形分割の見た目は異なりますがそれぞれの位置関係は同じなので) 同じポテンシャル付きクイバーであるため、 $\mathcal{D}^{f_i(\Delta)}$ と \mathcal{D}^Δ の間には自然な同一視が存在します。

$[\psi] \in \text{MCG}(S, M)$ に対し、 $\Delta \rightarrow \psi(\Delta)$ がフリップの列 $(f_{i_1}, \dots, f_{i_r})$ と辺のラベルの取り換え φ で表されるとき、各フリップに対応するミューテーションから定まる定理 1.4 の導来同値を合成することにより、次の圏導値を得ます*3:

$$\Phi_\psi := \varphi_* \Phi_{i_r} \cdots \Phi_{i_1} : \mathcal{D}^\Delta = \mathcal{D}^{\psi(\Delta)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\Delta \quad (1)$$

以上で、写像類群 $\text{MCG}(S, M)$ の導来圏 \mathcal{D}^Δ への作用を得たことにまります。

3 進捗と課題

(1) の写像類群の導来圏への作用から、写像類 $[\psi]$ の写像トーラス $T_\psi = S \times [0, 1] / \{(x, 0) \sim (\psi(x), 1)\}$ として得られる実三次元多様体や結び目の不変量が取り出せないかと考えました。

(S, M) として 1 点トーラスを考え、写像類 $[\psi]$ として、meridian と longitude のそれぞれに対する左 Dehn twist の合成とすると、その写像トーラスは 4_1 結び目の補空間 $S^3 \setminus 4_1$ と同相になることが知られています。この写像類に対応する (1) の導来同値 Φ_ψ を Grothendieck 群に落とし、適切な基底を与えて次の線形写像の表現行列を計算しました。

$$K_0(\Phi_\psi) : K_0(\mathcal{D}^\Delta) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{D}^\Delta)$$

すると、その固有多項式が 4_1 結び目の Alexander 多項式を因子に持つことが計算により確かめられました:

$$\det(tI - K_0(\Phi_\psi)) = (t-1)\Delta_{4_1}(t)$$

ここで、 $\Delta_K(t)$ は結び目 K の Alexander 多項式。

一般に、 $K_0(\Phi_\psi)$ は $[\psi]$ の (S, M) (または (S, M) の二重被覆) のホモロジー群への作用の情報を持っていることがわかりました.*4

今後、この作用の“量子化”を与え、その他の結び目の量子不変量を与えることが出来ないか考えることが課題です。

参考文献

[KY] B. Keller, D. Yang, *Derived equivalences from mutations of quivers with potential*, Adv. Math. **226** (2011), no. 3, 2118–2168, <https://arxiv.org/abs/0906.0761>

[KVdB] B. Keller, (With an appendix by M. Van den Bergh.) *Deformed Calabi-Yau completions*, J. Reine Angew. Math. **654** (2011), 125–180, <https://arxiv.org/abs/0908.3499>

[FST] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. part I: Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), <https://arxiv.org/abs/math/0608367>

[Na] K. Nagao, *Mapping class group, Donaldson-Thomas theory and S-duality*, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kentaron/MCG_DT.pdf

*3 正確には、それぞれの導来同値に対し、適切な符号を選んでいる。

*4 実際には 1.4 で述べた通り導来同値には符号があり、それを適切に選ぶ必要がある。今は絵を描くとわかるという段階だが、絵を描かずとも機械的に符号を与える方法を考えている。

Hyper-Kähler Kirwan map について

山崎雄一郎

中央大学大学院 理工学研究科 数学専攻 修士二年

1 はじめに

Symplectic 商のコホモロジーを調べる手段の一つとして運動量写像の同変 Morse 理論がある。これに関する文献として [1] が挙げられ、この理論における重要な結果として Kirwan map の全射性が知られている。

本稿ではこの理論を Hyper-Kähler 多様体上で展開した際に知られている結果 (有限次元の場合) について紹介する。

2 Kirwan map の全射性

(M, ω) をコンパクトな symplectic 多様体, G を連結コンパクトな Lie 群, \mathfrak{g} を G の Lie 環, \mathfrak{g}^* を \mathfrak{g} の双対ベクトル空間とする。

定義 2.1. $G \curvearrowright (M, \omega)$ が Hamilton 作用であるとは以下の条件を満たす写像 $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ が存在するときをいう。

- (i) $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ は G 同変
- (ii) $\forall \beta \in \mathfrak{g}$ に対し, $d\langle \mu, \beta \rangle = \omega(-, v_\beta)$
ただし, $\langle -, - \rangle$ は自然な pairing とし, v_β は

$$v_\beta(x) = \frac{d}{dt}(\exp t\beta)x|_{t=0}$$

で定義される M 上のベクトルとする。この写像 μ を G 作用に関する運動量写像と呼ぶ。

命題 2.2. $G \curvearrowright (M, \omega)$ を Hamilton 作用とし, 運動量写像を $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ とする。 $0 \in \mathfrak{g}^*$ を運動量写像の正則値とし $G \curvearrowright \mu^{-1}(0)$ を自由な作用とする。このとき, 商空間 $\mu^{-1}(0)/G$ は symplectic 多様体の構造を持つ。 $\mu^{-1}(0)/G$ を symplectic 商とよぶ。

定理 2.3. ([1]) 準同型写像 $\kappa: H_G^*(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\mu^{-1}(0)/G; \mathbb{Q})$ は全射。

3 Hyper-Kähler Kirwan map について

定義 3.1. Riemann 多様体 (X, g) が以下の条件を満たすとき, Hyper-Kähler 多様体という。

- (i) 関係式, $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\text{id}_{TX}$ を満たす複素構造 I, J, K が存在する。
- (ii) 各複素構造 I, J, K に対し (X, g) は Kähler 多様体の構造を持つ。

定義 3.2. $G \curvearrowright (X, g, I, J, K)$ が Hyper-Hamilton 作用であるとは, G の作用が X のもつ各 Kähler 構造 ω_I ω_J ω_K に関して Hamilton 作用であるときをいう.

また, 対応する運動量写像を $\mu_I, \mu_J, \mu_K : X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ とおくと Hyper-Kähler 運動量写像が以下で定義される.

$$\mu_{HK} : X \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3, \mu_{HK}(x) = \mu_I(x) \otimes e_1 + \mu_J(x) \otimes e_2 + \mu_K(x) \otimes e_3$$

ただし, e_1, e_2, e_3 は \mathbb{R}^3 の標準基底.

定理 3.3. ([3], Theorem 3.2.) $0 \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3$ を $\mu_{HK} : X \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3$ の正則値とし, $G \curvearrowright \mu_{HK}^{-1}(0)$ を自由な作用とする. このとき, $\mu_{HK}^{-1}(0)/G$ は Hyper-Kähler 多様体の構造を持つ.

$\mu_{HK}^{-1}(0)/G$ を Hyper-Kähler 商とよぶ.

予想 3.4. 準同型写像 $\kappa_{HK} : H_G^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\mu_{HK}^{-1}(0)/G; \mathbb{Q})$ は全射.

定義 3.5. 滑らかな関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ は勾配ベクトル場 $-\nabla f$ が定める任意の積分曲線がコンパクト集合に含まれるとき, flow-closed であるという.

定理 3.6. ([2], Theorem 4.8.) T をトーラスとし, $\|\mu_{HK}\|^2$ が flow-closed であると仮定する. このとき,

$$\kappa_{HK} : H_T^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\mu_{HK}^{-1}(0)/T; \mathbb{Q})$$

は全射.

定義 3.7. (M, g) を完備な Riemann 多様体とし, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする. $\forall c \in \overline{\text{Im}(f)}$ に対し, $\exists \varepsilon > 0, k > 0, 0 < \alpha < 1$, s.t. $|f(x) - c| < \varepsilon$ を満たす $\forall x \in X$ に対し,

$$\|\nabla f\| \geq k|f(x) - c|^\alpha$$

が成立するとき, f は global Lojasiewicz 不等式を満たすという.

命題 3.8. ([4], Proposition 2.3.7.) $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ が global Lojasiewicz 不等式を満たし, $\exists N \in \mathbb{R}$ s.t. $f(x) \geq N$ が成り立つと仮定する. このとき, f は flow-closed である.

定理 3.9. ([4], Theorem 2.3.11.) V を Hermitian 内積を持つ複素ベクトル空間とし, T をトーラスとする. このとき, 余接束 T^*V への T 作用から定まる Hyper-Kähler 運動量写像のノルム 2 乗 $\|\mu_{HK}\|^2$ は global Lojasiewicz 不等式を満たす.

参考文献

- [1] F. Kirwan. Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry. Princeton University Press, 1984.
- [2] L. Jeffrey, Y.H. Kiem, and F. Kirwan. On the cohomology of hyperkähler quotients. Transform. Groups, 14(4):801-823, 2009.
- [3] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, and M. Roček. Hyper-kähler metrics and supersymmetry. Comm. Math. Phys., 108(4):535-589, 1987.
- [4] J. M. Fisher, The Topology and Geometry of HyperKähler Quotients. Thesis (Ph.D.)-University of Toronto (Canada). 2014. 116 pp. ISBN: 978-1339-37235-8

バナッハ・タルスキーのパラドックスと ユークリッド空間における測度

金沢大学 自然科学研究科 数物科学専攻 数学コース 博士前期課程 1 年

堤 康平

このアブストラクトでは, Stan Wagon 著の “The Banach-Tarski Paradox” [Wagon] で述べられている, 3 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 における測度に関する結果の一つを紹介する.

等長変換不変な完全加法測度で, $2^{\mathbb{R}^3}$ の全ての元が可測であり $[0, 1]^3$ の測度が 1 であるものは存在しない. 実際, \mathbb{R}^3 の部分集合で, 上記の条件を満たすような測度に対しても非可測となるものが, 次のようにして構成される. 二つの実数に対して差が有理数となるときにそれらは同値であると定め, この同値関係による同値類の完全代表系を選択公理により $[0, 1]$ 区間内で取り出す. この完全代表系は 1 次元のそのような測度に対して非可測集合であるから, $[0, 1]^2$ との直積を取ることで目的の集合が得られる.

完全加法性を有限加法性に弱めた場合にも, 同様の性質を持つ集合が存在するかどうかを考える. 具体的には, 等長変換不変な有限加法測度で, $2^{\mathbb{R}^3}$ の全ての元が可測であり $[0, 1]^3$ の測度が 1 であるものが存在するかという問題である. 実は, そのような測度も存在しない. これは, 「球体を分割し, 元の球体と同じ半径のものを二つ作ることができる」として知られているバナッハ・タルスキーのパラドックスの証明と同じような手法を用いることで証明することができる. この結果 (定理 3.2) とその証明を, 今回のセミナーで紹介する.

1 逆説性の定義

以下では, 群 G が集合 X に左から作用しているとする.

定義 1.1. X の部分集合 E が G -逆説的であるとは, 自然数 m, n と, 互いに素な $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \subset E$ と, $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$ で, $\bigcup_{i=1}^m g_i(A_i) = E = \bigcup_{j=1}^n h_j(B_j)$ を満たすものが存在するときをいう.

この用語を用いると, バナッハ・タルスキーのパラドックスは, \mathbb{R}^3 の球体が G_3 -逆説的であると述べられる. ここで, G_3 は \mathbb{R}^3 の等長変換群である.

この先のいくつかの結果で選択公理 (AC)^{*1}が必要となるのは, 次の命題を用いるためである.

命題 1.2 (AC, [Wagon, Theorem 1.10]). G が自身への左作用によって G -逆説的であるとし, さらに G の X への作用は自由であるとする. このとき, X は G -逆説的である.

2 球面の逆説的な部分集合の構成

バナッハ・タルスキーのパラドックスや今回の結果は, 組み合わせ群論^{*2}を用いて証明される. ここでは, 組み合わせ群論に関する結果を紹介する.

自由群^{*3}を, 同じ頭文字の語からなる集合に分割することで, 次の結果が得られる.

定理 2.1 ([Wagon, Theorem 1.2]). 位数 2 の自由群は, 自身への左作用により逆説的である.

次の主張における自由部分群の存在は, バナッハ・タルスキーのパラドックスの証明や, 今回の目的である定理 3.2 の証明に用いられる.

^{*1} 選択公理に関しては, 例えば [松坂] の 47 頁を見よ.

^{*2} 組み合わせ群論に関しては, 例えば [MKS] を見よ.

^{*3} 自由群に関しては, 例えば [Hall] を見よ.

定理 2.2 ([Wagon, Theorem 2.1]). 回転群 SO_3 には, 位数 2 の自由部分群が存在する.

証明. 実際,

$$\phi^{\pm 1} := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho^{\pm 1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

が位数 2 の自由群を生成する. □

定理 2.2 の自由部分群による固定点 (可算集合である) を 2 次元球面 S^2 から除いた集合は, 命題 1.2 により S^2 の SO_3 -逆説的な部分集合であることから次の定理が得られる.

定理 2.3 (ハウドルフのパラドックス, AC, [Wagon, Theorem 2.3]). S^2 の可算部分集合で, 補集合が SO_3 -逆説的であるものが存在する.

3 逆説的な集合と測度

G -逆説的である部分集合は, 今回問題としている測度に対して零集合でなければならない.

命題 3.1 ([Wagon, Proposition 2.5]). X の部分集合 E が G -逆説的ならば, G -不変な X 上の有限加法測度で, 2^X の全ての元が可測であり E の測度が有限であるものに対して E は零集合である.

この事実とハウドルフのパラドックスを用いて, 今回のセミナーの目的である次の結果が証明される.

定理 3.2 (AC, [Wagon, Theorem 2.6]). SO_3 -不変な S^2 上の有限加法測度で, 2^{S^2} の全ての元が可測であり全測度が 1 であるものは存在しない. さらに, 等長変換不変な \mathbb{R}^3 上の有限加法測度で, $2^{\mathbb{R}^3}$ の全ての元が可測であり $[0, 1]^3$ の測度が 1 であるものは存在しない.

参考文献

[Hall] Marshall Hall, Jr.: 群論 (上), 金沢稔, 八牧宏美訳, 吉岡書店, 1969.

[MKS] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, Donald Solitar: Combinatorial group theory, Dover Publications, Inc., 1976.

[松坂] 松坂和夫: 集合・位相入門, 岩波書店, 1968.

[Wagon] Stan Wagon: The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1993.

折紙の数理

高村侑樹

東京工業大学 理学院数学系数学コース 修士1年

折紙の数理は展開図という道具から様々な定理を導いてきた。展開図とは、狭義には折紙作品をもとの紙まで開いた際に紙についている山折り線と谷折り線を示したものである。

今回はこの展開図が重要な役割を果たす「一刀切り問題」と「折鶴変形理論」のそれぞれについて、私の興味のある問題を紹介する。

1 一刀切り問題

1.1 概略

一刀切り問題とは、紙を折ったのちにある直線に沿って切った場合に、切り取った形で与えられた図形を作ることができるかという問題である。これは次のように言い換えられる；

紙の上に描かれた線分の族を、紙を折ることによって一直線上に乗せ、その直線上に紙の他の部分に乗せないようにすることができるか。

この問題には Demaine らによる *Straight-Skeleton Method* と Bern らによる *Disk-Packing Method* という2通りの解法が与えられ、肯定的に解決された。

Straight-Skeleton Method では与えられた図形から紙の上に *straight skeleton* と *perpendicular* という2種類の線を引き、*straight skeleton* すべてと *perpendicular* の一部に山谷を付けるという手順を取る。これは紙を切る直前の状態から逆算して折り目を付けていく手法である。

一方 *Disk-Packing Method* では与えられた図形の境界を太らせたうえで紙を良い性質をもつ三角形と四角形で分割し、それぞれの三角形と四角形を畳んだものを結合する、という手順を取る。こちらは紙を切る直前の状態で図形の内部と外部を高さによって区別するという手法を取るのだが、その際に高さを揃えるための道具として一値分子という概念を用いる。一値分子とは簡単にいうと紙の一部を境界が一直線上に乗るように折ったもののことを言う。この一値分子という概念は後述の折鶴変形理論でも重要な役割を果たす。

1.2 色つき0次元一刀切り問題

一刀切り問題に次の条件を加える；

1. 与えられた図形は全て点である。
2. 与えられた図形には色がついており、同じ色を重ねて異なる色は重ねないようにする。

この問題は有限の紙では解決済みであるが、無限の大きさの紙については一般には可能ではないことが知られている。この問題が解決できるための必要十分条件についてはまだ知られておらず、研究が続けられている。

2 折鶴変形理論

2.1 概略

折鶴変形理論とは、紙が内接円を持つ四角形であることがきれいな鶴を折ることができるための必要十分条件であることを主張するものである。ここできれいな折鶴とは、変形鶴の基本形から作られた鶴のことであり、変形鶴の基本形とは次を満たすものである；

1. 折り目により紙を4つの四角形の一値分子に分解できる。
2. それぞれの一値分子は隣り合う辺の角の二等分線と、それらの交点から境界に下された垂線のみで置まれる。
3. 隣り合う一値分子の組でその合併が四角形になるものがあり、紙からその組を除いた残りの部分も四角形である。
4. 折り畳んだときに紙の縁はすべて一直線上にあり、この直線上に鶴の背中の頂点がある。

ここで三角形はその内心から辺に降ろした垂線の足を4つ目の頂点とすることで四角形として扱われているものとする。

条件2を満たす一値分子が内接円を持つことと、内接円を持つ四角形の二辺を重ねて出来る四角形がまた内接円を持つことから必要性が、紙の向かい合う頂点を通り残りの点を焦点とする双曲線上に鶴の背中の頂点があることから十分性が従う。

2.2 折紙の連続変形

紙を折ったものと、もとの紙との間には必ず連続変形が存在する。したがって通常の折鶴と変形折鶴の間には連続変形が存在するが、一方で連続変形によって兜などのまったく別の作品にも変形することが可能となる。そのため折紙作品を区別するためには通常の連続変形は有用ではなく、特殊な連続変形を考える必要がある。

今後の研究ではこの特殊な連続変形について考えたいと思っている。

参考文献

- [1] Erik D. Demaine and Joseph O’rourke, Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra
Cambridge university press
- [2] 川崎敏和, バラと折り紙と数学と 森北出版

Koszul 双対性の一般化と Riemann 面の幾何

杉山 聡

1 Koszul 双対性

Koszul 双対性とは、あるクラスの有限次元代数に関する双対性である。今回は、籓 (えびら) の関係式付き道代数について紹介する。

定義 1.1 有向グラフを籓 (quiver) という。具体的には、 $\vec{\Delta} = (\Delta_0, \Delta_1, s, t)$ であって、 Δ_0, Δ_1 は集合、 $s, t: \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ は集合の写像であるとき、これを籓という。

籓 $\vec{\Delta}$ に対して、 Δ_0 を頂点集合といい、その元を頂点という。 Δ_1 を矢集合といい、その弦を矢という。矢 α に対して、 $s(\alpha)$ を α の始点 (source)、 $t(\alpha)$ を α の終点 (target) という。また、 $i, j \in \Delta_0$ と、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Delta_1$ について、 $s(\alpha_1) = i, t(\alpha_n) = j, t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ を満たすとき、 $w = (i|\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n|j)$ のことを i から j の長さ n の道であるという。また、 $(i|i)$ と書いて、 i から i への長さ 0 の道という。

定義 1.2 K を体とし、 $\vec{\Delta}$ を籓とする。この時、籓の道代数 (path algebra of a quiver) $K\vec{\Delta}$ を以下のように定義する。

まず、線型空間として、 $K\vec{\Delta} := \bigoplus_{w: \vec{\Delta} \text{ の道}} Kw$ であって、道の積は、 $w = (i|\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n|j), w' = (k|\beta_1 \beta_2, \dots, \beta_m|l)$ について、 $j = k$ のとき $ww' := (i|\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_n \beta_1 \beta_2, \dots, \beta_m|l)$ とし、そうでない場合は 0 として定義する。

また、 $\rho = \sum c_k w_k \in K\vec{\Delta}$ ($c_k \in K, w_i: \vec{\Delta}$ の長さ 1 以上の道) は、すべての道の始点と終点がそれぞれ一致しているとき、関係式という。関係式の組 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ に対して、籓の関係式付き道代数 (path algebra with relation) $K(\vec{\Delta}, \rho)$ を、 $K(\vec{\Delta}, \rho) := K\vec{\Delta}/(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ の生成する両側イデアルと定める。

関係式の組 ρ を構成する関係式に登場する道の長さがすべて 2 の時、これを 2 次の関係式といい、 $K(\vec{\Delta}, \rho)$ を籓の 2 次関係式付き道代数という。

この籓の 2 次関係式付き道代数について、以下のように Koszul 双対を定義する。

定義 1.3 $\vec{\Delta}$ は、その道代数が有限次元となるような籓とし、 ρ を 2 次関係式の組とする。

$A := K(\vec{\Delta}, \rho)$ に対して、 $S(1), S(2), \dots, S(n)$ を、有限生成右 A 加群のなす Abel 圏 $\text{mod-}A$ の単純対象の同型類の代表元のリストとする (有限個になることが知られている)。このとき、

$A^! := \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_{D^b(A)}^*(S(i), S(j))$ と定める ($D^b(A)$ は A の導来圏)。これを、 A の Koszul 双対という。

ここで、次のような代数を考える。 $\vec{\Delta}^{op}$ を、矢印の向きを反転させた簾とする。この簾の関係式の集合 ρ^\perp を次のようにとる。まず、 $P_2^{(op)} := \bigoplus_{w: \vec{\Delta}^{(op)} \text{ の長さ } 2 \text{ の道}} Kw$ とし、この直和分解について自然なペアリングを入れる。 ρ^\perp は、2次の関係式であって、 ρ^\perp の生成する P_2 の部分空間が、 ρ の生成する部分空間の直行補空間となっているものとする。

定理 1.4 上記の設定で、 $A^!$ と $K(\vec{\Delta}^{op}, \rho^\perp)$ は自然に同型となる。特に、 $A^{!!} \cong A$ である。

少し例を見よう。 $\vec{\Delta}$ を、

$$\vec{\Delta} := \begin{array}{ccccccc} & & \alpha & & \beta & & \gamma \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ 1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 4 \end{array}$$

で定める。上の定理より、 $A_1 = K\vec{\Delta}$ とすれば、この Koszul 双対は $A_1^! = K(\vec{\Delta}^{op}, (\beta\alpha, \gamma\beta))$ となり、 $A_2 = K(\vec{\Delta}, (\alpha\beta))$ とすれば、この Koszul 双対は $A_2^! = K(\vec{\Delta}^{op}, (\gamma\beta))$ となる。見てわかる通り、元の代数で関係式が無かった（つまり積が 0 でない）ときに、Koszul 双対では関係式が現れ（つまり積が 0）、またその逆も成り立っていることが分かる。このようにして、Koszul 双対性は、「積と関係式の双対性」という理解をすることができる。

では、 $A = K(\vec{\Delta}, (\alpha\beta\gamma))$ の場合はどうだろうか。この代数 A はもはや Koszul 代数でない（関係式が 2 次でない！）ので、先ほどの定義は使えない。実際、 $E(A) := \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_{D^b(A)}^*(S(i), S(j))$ としても、 $E(E(A)) \neq A$ である。これは、代わりに dg Koszul 双対 $A_{dg}^! := \bigoplus_{i,j} \text{Hom}_{C_{dg}^b(A)}^*(S(i), S(j))$ を使えば回避でき、この場合 $(A_{dg}^!)_{dg}^! \cong A$ となることが証明できる。ここで、 $C_{dg}^b(A)$ は、有限生成右 A 加群の cochain complex のなす dg 圏である。しかし、この場合の $A_{dg}^!$ を実際に計算してみると、 $\text{Hom}_{C_{dg}^b(A)}^*(S(i), S(j))$ のうち 0 にならないものは

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{C_{dg}^b(A)}^*(S(j), S(j)) &= k \cdot 1_{S(j)}, \\ \text{Hom}_{C_{dg}^b(A)}^*(S(2), S(1)) &\cong K \cdot a, \\ \text{Hom}_{C_{dg}^b(A)}^*(S(3), S(2)) &\cong K \cdot b, \\ \text{Hom}_{C_{dg}^b(A)}^*(S(4), S(1)) &\cong K \cdot c \\ \text{Hom}_{C_{dg}^b(A)}^*(S(4), S(2)) &\cong K \cdot e \oplus K \cdot f, \\ \text{Hom}_{C_{dg}^b(A)}^*(S(4), S(3)) &\cong K \cdot g \oplus K \cdot h \oplus K \cdot i \end{aligned}$$

で、次数は $\deg a = \deg b = \deg e = \deg g = \deg h = 1, \deg c = \deg f = \deg i = 2$ 、0 でない微分は $de = f, dg = i$ 、単位元を含まない非自明な積は $b \circ g = f, a \circ e = c$ となる。これは非常に複雑であり、「積と関係式の双対性」という理解はできなくなってしまう。

もし、「積と関係式の双対性」という考え方を推し進めたいのであれば、長さ 3 の関係式 $\alpha\beta\gamma$ は、その Koszul 双対において、何か 3 元の積に対応すべきである。一般に、長さ n の関係式には、何か n 元の積に対応すべきである。これはどうやら dg 圏の範疇では捉えられないらしいことが上記

の例から分かる。そこで、 A_∞ 代数、 A_∞ 圏の出番となる。

2 A_∞ 代数と Koszul 双対

まずは、 A_∞ 代数の定義をしよう。

定義 2.1 $(A, \{\mu^d\}_{d \geq 1})$ が K 上の A_∞ 代数であるとは、

1. $A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A^d$ は \mathbb{Z} 次数つき線形空間であり、
2. $\mu^d: A^{\otimes d} \rightarrow A$ は次数 $2-d$ の線形写像で、以下の A_∞ 関係式を満たす。

$$\sum_{i,j,k} (-1)^{\dagger} \mu^k(a_d, \dots, a_{i+j+1}, \mu^j(a_{i+j}, \dots, a_{i+1}), a_i, \dots, a_1) = 0$$

ここで、 $\dagger = \sum_{1 \leq l \leq i} (\deg a_l - 1)$ で、 d は $d \geq 1$ である。

この μ^d が、Koszul 双対の文脈で先ほど話題にしていた長さ d の関係式に対応する d 元の積に対応することが、Fukaya 圏を通じた計算で分かる。Fukaya 圏の話を始めると長いので本アブストラクトでは省略するが、発表時に伝えたいと思う。

さて、この μ^d が満たす A_∞ 関係式を見てみよう。これは、 $d \geq 1$ を決める毎に定まる μ たちに関する 2 次関係式である。 $d = 1, 2, 3$ の場合に見てみよう。 $d = 1$ の場合は、 $\mu^1(\mu^1(a_1)) = 0$ となる。 $\deg \mu^1 = 2 - 1 = 1$ で会ったので、 (A, μ^1) は cochain complex になる。次数の d と紛らわしいが、 $\mu^1(a)$ を da と書こう。

$d = 2$ の場合、登場するのは μ^1 と μ^2 である。 μ^2 は 2 元を 1 元にするものなので、通常の積のように $\mu^2(a_2, a_1)$ を $a_2 \cdot a_1$ と書くことにする。そうすると、 A_∞ 関係式は $d(a_2 \cdot a_1) \pm da_2 \cdot a_1 \pm a_2 \cdot da_1 = 0$ となる。これは、次数(符号)つきの場合の Leibniz 則である。なので、 $H(A, d)$ 上で積を $[a_2] \cdot [a_1] := (-1)^{\deg a_1} [\mu^2(a_2, a_1)]$ と定めると、 $H(A)$ は well-defined になる。

$d = 3$ の場合の A_∞ 関係式は、

$$a_3 \cdot (a_2 \cdot a_1) \pm (a_3 \cdot a_2) \cdot a_1 = \pm d(\mu^3(a_3, a_2, a_1)) \pm \mu^3(da_3, a_2, a_1) \pm \mu^3(a_3, da_2, a_1) \pm \mu^3(a_3, a_2, da_1)$$

となる。右辺は一般に 0 にはならないので、 μ^2 が定める積構造は結合的にならない。であるが、 $H(A, d)$ 上で考えると、右辺は常に 0 になるので、 $H(A, d)$ に先ほど定めた積は結合的になる。この性質をもって、 A_∞ 代数はホモトピー結合的な代数と呼ばれることがある。

以上を元に、 A_∞ 圏は、 A_∞ 代数の圏バージョンとして以下のように定義される。

定義 2.2 A_∞ 圏 \mathcal{A} は以下の情報からなる。

1. 対象の集合 $Ob(\mathcal{A})$
2. 2 つの対象 $X_0, X_1 \in Ob(\mathcal{A})$ に対して、射の集合として \mathbb{Z} 次数つき線形空間 $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ が与えられている

3. $d \geq 1$ と $d + 1$ 個の対象 $X_0, X_1, X_2, \dots, X_d$ について、次数 $2 - d$ の写像

$$\mu^d: \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-1}, X_d) \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_{d-2}, X_{d-1}) \otimes \cdots \otimes \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{A}}(X_0, X_d)$$

が与えられている

そして、 μ たちは定義 2.1 と同じ A_∞ 関係式を満たす。

この A_∞ 圏の概念を用いると、先ほどの代数 A の Koszul 双対を、次の形で計算できる。 A_∞ 圏 \mathcal{A} を、 $Ob(\mathcal{A}) = \{S(1), S(2), S(3), S(4)\}$ とし、0 でない射の集合は $\text{hom}_{\mathcal{A}}(S(j), S(j)) = K \cdot 1_{S(j)}$ 、 $\text{hom}_{\mathcal{A}}(S(j+1), S(j)) = K \cdot a_{j+1,j}$ 、 $\text{hom}_{\mathcal{A}}(S(4), S(1)) = K \cdot b$ で次数は $\deg a_{j+1,j} = 1$ 、 $\deg b = 2$ 。恒等射を含まない非自明な射の合成は $\mu^3(a_{2,1}, a_{3,2}, a_{4,3}) = b$ と定める。すると、 A の Koszul 双対 $\mathcal{A}^!$ は $\mathcal{A}^!_\infty = \bigoplus \text{hom}_{\mathcal{A}}(S(i), S(j))$ となる。

今度の場合は、関係式 $\alpha\beta\gamma$ に対応して $\mu^3(a_{2,1}, a_{3,2}, a_{4,3}) = b$ が出てきており、余計な射や関係式はない。このように、 A_∞ 代数を用いると、Koszul 双対は「積と関係式的双対性」として理解することができる。

3 Riemann 面の幾何との関係

では、どのように上記の \mathcal{A} を見つけ、それを用いて Koszul 双対を計算すればいいだろうか。方法はいくらかあるだろうが、私の方法では Riemann 面の Fukaya 圏を用いることになる。

Fukaya 圏は一般に (よい) Symplectic 多様体に対して定義される A_∞ 圏である。この中では、導来圏での難しい計算を、幾何的な操作で実現することができる場合があり、Symplectic 多様体が Riemann 面の場合、それがかなり具体的に行える場合がある。詳しい内容は、当日の講演や、現在作成中の論文に譲ることとして、このアブストラクトはここで終わろうと思う。

参考文献

- [Ka12] 梶浦 宏成, 数物系のための圏論 導来圏, 三角圏, A_∞ 圏を中心に, SGC ライブラリ 75, サイエンス社.
- [Se08] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, European Math. Soc., 2008.

今勉強している内容について

袁 海岳

東北大学大学院情報科学研究科情報基礎科学専攻 修士1年

大学4年のゼミで解析学分野の作用素環論について勉強してきましたが、大学院に入ってからトポロジーの世界に転換しました。特に、3次元トポロジーの結び目理論の基礎を勉強しています。使っているテキスト[1]は分りにくいところが多いので、[2]と[3]を併せて奮闘している最中です。最終的に結び目理論のどういう部分を将来研究したいのかは今のところまだはっきり分かりませんが、最近、代数的構造を持つ結び目の表示のひとつであるBraidおよびQuandleについて興味を持ち始めたので、それらについてこれからもっと詳しく勉強したいと思っています。また、位相幾何学の知識を独学で勉強していますが、非常に難しい内容なので、苦労しています。今回の新人セミナーを通じて、みなさんと一緒にトポロジーに関する知識を交流し、視野を広げ、今後の研究に活用していきたいと思っています。

参考文献

- [1]K. Murasugi, *Knot Theory and Its Applications*, Birkhäuser, 1996
- [2]C. Livingston, *Knot Theory*, Math.Association of America, 1993
- [3]P. Cromwell, *Knots and Links*, Cambridge, 2004

球面2次元ブレイド

石地 知興 (東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻修士2年)

概要

ブレイド(組みひも)を2次元に拡張した概念として、2次元ブレイドがある。通常2次元ブレイドというと $D^2 \times D^2$ に埋め込まれた曲面を指す。一方で私が研究しているのは、ファイバーが S^2 の2次元ブレイドである。言い換えれば $S^2 \times D^2$ に埋め込まれた曲面である。本稿では、そのファイバーが S^2 の2次元ブレイドについて紹介する。

1. ブレイド

ブレイドを定義する方法はいくつかあるが、ここでは次のように定義する。

D^2 を2次元円盤とし、 $I = [0, 1]$ とする。また、 $pr_2 : D^2 \times I \rightarrow I$ を第二成分への射影とする。 $Q_m = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset \text{Int}D^2$ とする。

定義 1.1. 幾何的 m -ブレイドとは、 $D^2 \times I$ にプロパーに埋め込まれた1次元多様体で、次の条件を満たすものである。

- (1) $pr_2|_b : b \rightarrow I$ は次数 m の被覆写像である。
- (2) $\partial b = Q_m \times \partial I$ 。

2. 2次元ブレイド

前節でブレイドを定義した。この節では、ブレイドを2次元へ拡張する。

D_1^2 と D_2^2 を2次元円盤とし、 $pr_2 : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_2^2$ を第二成分への射影とする。 $X_m = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset \text{Int}D_1^2$ とする。

定義 2.1. 次数 m の2次元ブレイドとは $D_1^2 \times D_2^2$ にプロパーに埋め込まれたコンパクト有向2次元多様体 S で次の条件を満たすものである。

- (1) $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$ は次数 m の単純分岐被覆写像である。
- (2) $\partial S = X_m \times \partial D_2^2$ 。

3. 球面2次元ブレイド

最後にファイバーが S^2 の2次元ブレイド(球面2次元ブレイド)を定義する。

S^2 を2次元球面とし D^2 を2次元円盤とする。 $pr_2 : S^2 \times D^2 \rightarrow D^2$ を第二成分への射影とする。 $Y_m = \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset S^2$ とする。

定義 3.1. 次数 m の球面2次元ブレイドとは、 $S^2 \times D^2$ にプロパーに埋め込まれたコンパクト有向2次元多様体 S で次の条件を満たすものである。

- (1) $pr_2|_S : S \rightarrow D^2$ は次数 m の単純分岐被覆写像である。
- (2) $\partial S = Y_m \times \partial D^2$ 。

参考文献

- [1] S.Kamada, *Braid and knot theory in dimension four*, Math. Surveys Monogr. **95**, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 2002.

擬等角写像とタイヒミュラー空間

浅香 猛

東京大学大学院数理科学研究科 修士一年

1 擬等角写像

Definition 1 $[a, b] : \mathbb{R}$ の閉区間とする. $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, map に対し,

$$u \text{ が絶対連続} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, a \leq \forall a_1 < \forall b_1 \leq \forall a_2 < \forall b_2 \leq \dots \leq \forall a_n < \forall b_n \leq b \quad (n < \infty) \\ \sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta \rightarrow \sum_{k=1}^n |u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon$$

と定める.

Definition 2 $D : \mathbb{C} (\cong \mathbb{R}^2)$ 上の領域 (連結開集合) とする. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, map に対し,

$$f \text{ が ACL である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall [a, b] \times [c, d] : D \text{ 内の実軸と虚軸に平行な辺をもつ長方形 に対し} \\ x \mapsto f(x, y_0) \text{ は絶対連続 (a.e. } y_0 \in [c, d]) \\ y \mapsto f(x_0, y) \text{ は絶対連続 (a.e. } x_0 \in [a, b])$$

と定める.

以降, D は \mathbb{C} 上の領域とする.

Definition 3 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, 向きを保つ中への同相 に対し,

$$f \text{ が } D \text{ 上で擬等角である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{(i) } f \text{ は } D \text{ 上 ACL} \\ \text{(ii) } 0 \leq \exists k < 1, D \text{ 上 a.e. で } |f_{\bar{z}}| \leq k |f_z|$$

と定める.

Definition 4 $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, 向きを保つ中への同相 に対し,

$$f \text{ が } D \text{ 上で擬等角である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{(i) } \exists g_1, g_2 : D \rightarrow \mathbb{C}, \text{ 局所可積分, } \forall \phi \in C_0^\infty(D) \text{ に対し} \\ \langle F_f, -\phi_z \rangle = \langle F_{g_1}, \phi \rangle, \langle F_f, -\phi_{\bar{z}} \rangle = \langle F_{g_2}, \phi \rangle \\ \text{(ii) } 0 \leq \exists k < 1, D \text{ 上 a.e. で } |g_2| \leq k |g_1|$$

と定める. ただし

$$\langle F_f, \phi \rangle := \int_D f \phi dx dy$$

である.

Definition 5 Jordan 閉領域 Q と Q の境界上正の向きに並んだ q_1, q_2, q_3, q_4 との組 $(Q; q_1, q_2, q_3, q_4)$ を quadrilateral という. Q もそうよぶ.

非自明なことではあるが、任意の quadrilateral Q に対し、 $a, b \in \mathbb{R}$ と $h: Q \rightarrow [0, a] \times [0, ib]$, Q 上同相, Q の内部で等角, $h(q_1) = 0, h(q_2) = a, h(q_3) = a + ib, h(q_4) = bi$ が存在し、 $\frac{a}{b}$ は一意に定まる. これを Q の module といい、 $M(Q)$ と表す.

Definition 6 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, 向きを保つ中への同相 に対し、

$$f \text{ が } D \text{ 上で擬等角である} \stackrel{\text{def}}{=} \forall Q: D \text{ 内の quadrilateral に対し} \\ \frac{1}{K} M(Q) \leq M(f(Q)) \leq KM(Q) \\ \text{を満たす } Q \text{ によらない定数 } K \geq 1 \text{ が存在する}$$

と定める.

Theorem 7 Definition 3, 4, 6 はすべて一致する. さらに、 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が擬等角 だと与えられたとき、Definition 3, 4 の k の下限は一致し、これを k_f とおき、Definition 6 の K の下限を K_f とおくと

$$K_f = \frac{1 + k_f}{1 - k_f}$$

の関係がある. K_f を f の最大歪曲度という.

Definition 8 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, 擬等角 に対し、

$$\mu_f := \frac{f_z}{f_{\bar{z}}}$$

と D 上 a.e. で定める (本当は定義するために、擬等角であることから D 上 a.e. で f_z が 0 にならないことを示さないといけない). これを f の歪曲係数という.

また、

$$B(D)_1 := \{ \mu: D \rightarrow \mathbb{C}, \text{ 有界可測関数 ; } \operatorname{ess. sup}_{z \in D} |\mu(z)| < 1 \}$$

と定めると、 $\mu_f \in B(D)_1$ である.

大事なものは、 \mathbb{H} の場合である.

Theorem 9 任意の $\mu \in B(\mathbb{H})_1$ に対し、 μ を歪曲係数とする擬等角写像 f が存在する. さらに f は $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上の同相写像に拡張される.

さらに、正規化条件

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = \infty$$

を課すと、 f は一意に定まる.

2 タイヒミュラー空間

R を普遍被覆面が \mathbb{H} のリーマン面とする.

Definition 10 $S : R$ と同相なリーマン面, $f : R \rightarrow S$, 同相写像 とする. このとき

$$f \text{ が擬等角である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, f \text{ の持ち上げ が擬等角である}$$

と定める. この定義は持ち上げ方によらないと示すことができる.

Definition 11 そして, 集合

$$\{(S, f) \mid S : R \text{ からの擬等角写像が存在するリーマン面, } f : R \rightarrow S, \text{ 擬等角である}\}$$

に対し

$$(S_1, f_1) \text{ と } (S_2, f_2) \text{ が同値} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists h : S_1 \rightarrow S_2, \text{ 等角 s.t. } f_2 \circ f_1^{-1} \text{ は } h \text{ にホモトピック}$$

という同値関係を導入したものを R のタイヒミュラー空間という. $T(R)$ とかく.

Definition 12 $p_1 := [S_1, f_1], p_2 := [S_2, f_2] \in T(R)$ に対し,

$$\mathcal{F}_{f_1, f_2} = \{g : S_1 \rightarrow S_2, \text{ 擬等角である} \mid g \text{ は } f_2 \circ f_1^{-1} \text{ にホモトピック}\}$$

とおき, 擬等角写像 g の最大歪曲度を $K(g)$ とかくことにする. さらに,

$$d(p_1, p_2) := \inf_{g \in \mathcal{F}_{f_1, f_2}} \log K(g)$$

とおき, これをタイヒミュラー距離という. これが距離であることを確かめるにはホモトピックならばアイソトピックであるという事実 ([3]) が必要である. これにより $T(R)$ に位相が入る.

Theorem 13 R : 種数 $g (\geq 2)$ の閉リーマン面 とすると, $T(R)$ は \mathbb{R}^{6g-6} 内の開球と同相になる.

参考文献

- [1] 今吉洋一, 谷口雅彦: タイヒミュラー空間論, 日本評論社, 2004.
- [2] L. V. アールフォルス (谷口雅彦訳): 擬等角写像講義, 丸善出版, 2015.
- [3] D.B.A. Epstein: Curves on 2-manifolds and isotopics, Acta Math. 115 (1966), 83-107

STRING TOPOLOGY

YASUHIKO ASAO

1. WHAT IS STRING TOPOLOGY ?

In 1999, Moira Chas and Dennis Sullivan discovered a beautiful ring structure on $H_*(LM)$, and what is more , a "BV structure", where LM is a free loop space of an orientable closed manifold M . We mainly call the study of that ring structure "string topology".

This ring is so interesting for some relations to other topological phenomena. For example, this ring includes the Goldman Lie algebra when M is a closed surface. And for one more example, this ring is isomorphic to the Hamilton Floer homology of cotangent bundle of M . I don't know about these well, so please lecture me if there is some professionals!!

In the rest of this section, we are overviewing the construction of "string product" due to Cohen and Johnes. This can be obtained by mixing intersection product and circle concatenation map $:\circ \times \circ \rightarrow \circ$.

At first, we consider following pullback diagram

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Map}(8, M) & \longrightarrow & LM \times LM \\ \text{ev}_{\frac{1}{2}} \downarrow & & \downarrow \text{ev}_0 \times \text{ev}_0 \\ M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M \end{array}$$

, where ev_0 and $ev_{\frac{1}{2}}$ denotes a evaluation map at time 0 and $\frac{1}{2}$, and Δ denotes a diagonal map.

We can pullback the tubular neighborhood of M in $M \times M$ to the tubular neighborhood of $\text{Map}(8, M)$ in $LM \times LM$. So we obtain a *Pontrjagin – Thom* map $\xi : LM \times LM \rightarrow \text{Map}(8, M)^{TM}$.

On the other hand, we can consider the concatenation map $\text{Map}(8, M) \rightarrow LM$. By composing these maps and Thom isomorphism at homology level, we can get string product

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} H_p(LM) \otimes H_q(LM) & \xrightarrow{\times} & H_{p+q}(LM \times LM) & \xrightarrow{\xi_*} & H_{p+q}(\text{Map}(8, M)^{TM}) \\ & \xrightarrow{\text{Thomisom.}} & H_{p+q-d}(\text{Map}(8, M)) & \xrightarrow{\text{concatenation}} & H_{p+q-d}(LM) \end{array}$$

, where $d = \dim M$.

2. EXAMPLES

In this section, we just introduce some well-known computational results. These can be computed by using spectral sequence methods.

Theorem 2.1.

$$(3a) \quad H_{*+n}(LS^n) \cong \begin{cases} \Lambda(a_{-n}) \otimes \mathbb{Z}[b_{n-1}] & (n : \text{odd}) \\ \Lambda(a_{-n}) \otimes \mathbb{Z}[u_{-1}, b_{2n-2}] & (n : \text{even}) \end{cases}$$

$$(3b) \quad \begin{cases} (u_{-1}^2, u_{-1}a_{-n}, 2a_{-n}v_{2n-2}) & (n : \text{even}) \end{cases}$$

, where lower index denotes degree.

Theorem 2.2.

$$(4) \quad H_{*+2n}(LCP^n) \cong \frac{\Lambda(w_{-1}) \otimes \mathbb{Z}[x_{-2}, y_{2n}]}{(x_{-2}^{n+1}, (n+1)x_{-2}^n y_{2n}, w_{-1}x_{-2}^n)}$$

In general, computing loop homology is not so easy and not many examples are computed.

(Y. Asao) GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO. 3-8-1 KOMABA MEGUROKU TOKYO 153-8914, JAPAN
E-mail address: `asao@ms.u-tokyo.ac.jp`

完全マッチングと結び目の行列式

東京工業大学 博士課程 2 年 村上広樹

本稿では組み合わせ論の話題である完全マッチングと、交代結び目の行列式の関係について述べる。マッチングとはグラフ理論における興味深い話題の一つであり、Hall の結婚定理や安定結婚問題、握手補題などでお目にかかることができる。グラフのマッチングの中で、ある辺が他の辺と頂点を共有しないものを特に完全マッチング (perfect matching) と呼ぶ。

一方、結び目図式が与えられた時、その図式から二部グラフを構成できることが知られている。以下では、与えられた結び目が交代結び目の時、このグラフの完全マッチングの個数が結び目の行列式と一致することを述べる。

1 グラフとマッチング

まず、グラフ理論側の用語を定義していく。

定義 1.1 (マッチング). $G = (V, E)$ を頂点集合が V 、辺集合が E であるグラフとする。 G の辺部分集合 $M \subset E$ で互いに端点を共有しないものをマッチングという。ある頂点がマッチングの辺 e の端点になっている時、マッチングの辺が端点を飽和するという。

定義 1.2 (完全マッチング). マッチングの辺がグラフのすべての頂点を飽和している時、このマッチングを完全マッチングという。

組み合わせ論では対象の要素の数を数え上げることが問題となることが多い。今回は以下のような重みつきグラフの分配関数を定義する。

定義 1.3 (分配関数). Γ をウェイトが μ の重みつきグラフ、 \mathcal{M} を Γ の完全マッチング全体の集合とする。この時、 Γ の分配関数 $Z(\Gamma)$ を

$$Z(\Gamma) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \prod_{e \in M} \mu(e)$$

と定義する。

Γ が平面グラフの時、重み μ を変形して $Z(\Gamma)$ をある行列の行列式を用いて計算できるようになることが知られている。変形後の重みのことを Kasteleyn weighting という。以下、Kasteleyn weighting の定義を述べる。

定義 1.4 (Kasteleyn weighting). $\Gamma = (V, W, E)$ を、頂点集合が V と W 、辺集合が E であるような二部グラフとする。 Γ の Kasteleyn weighting とは辺集合 E 上の関数 $\varepsilon : E \rightarrow \{\pm 1\}$ で、 $\text{mod } 4$ で 0 本の辺を持つ有界領域には奇数個の -1 が、 $\text{mod } 4$ で 2 本の辺を持つ有界領域には偶数個の -1 が割り当てられているものである。

$\Gamma = (V, W, E, \mu \cdot \varepsilon)$ を重みつきグラフとする。ただし、重みは既存の重み μ に Kasteleyn weighting ε をかけて得られるものとする。この時、分配関数 $Z(\Gamma)$ は

$$Z(\Gamma) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \prod_{e \in M} \mu(e)\varepsilon(e) \tag{1}$$

と書き直せる。

2 結び目からグラフを作る

本節では与えられた結び目図式から **Balanced Overlaid Tait graph** という二部グラフを得る方法を述べる。

定義 2.1 (Balanced Overlaid Tait graph). D を結び目図式とする。このとき、 D の *Balanced Overlaid Tait (BOT) グラフ* $\Gamma_D = (V, W, E)$ は以下の手順で構成される。

- 頂点集合 V は結び目の頂点集合とする。
- 頂点集合 W は D の有界領域全体の集合から一面を除いたものとする。除かれる面は非有界な領域に隣接しているものから選ぶとする。
- 2つの頂点 $x \in V$ と $y \in W$ に対して、結び目の交点 x が有界領域 y と接している時、辺 $xy \in E$ を引くものとする。

例 2.2. 8 の字結び目の図式から得られる *BOT* グラフは図のようになる。

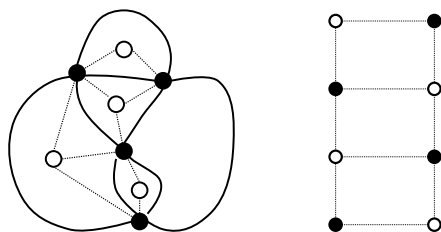


図 1 8 の字結び目の BOT グラフ (点線)

3 結び目と完全マッチング

以下、結び目は交代結び目であるとする。

定義 3.1 (Dehn 彩色). 結び目図式 D の **Dehn n 彩色** とは、結び目図式 D の有界領域全体 F 上の関数 $\tilde{C} : F \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で、以下の図において $a + b \equiv c + d \pmod{n}$ という関係式を満たすものである。

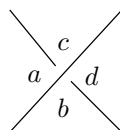


図 2 Dehn 彩色

Dehn 彩色における関係式を変形すると、 $-a - b + c + d \equiv 0$ となる。BOT グラフを構成する際に結び目の交点から領域に向かって辺を引くが、この時に重みとして領域に置かれた文字の係数を置くことにする。例えば図 2 において、文字 a がある領域に引かれる辺の重みとして -1 を置く。

この重みを Dehn weighting という。Dehn weighting について、以下のことが知られている。

命題 3.2 ([4]). D が交代結び目の図式であるとき、Dehn weighting は Kasteleyn weighting となる。

この命題から、交代結び目から構成された BOT グラフは自然に Kasteleyn weighting を持つことがわかる。さらに [1] において、平面二部グラフ上の任意の重みは Kasteleyn weighting に書き換えられることが述べられているので、式 (1) の分配関数は

$$Z(\Gamma) = \sum_{m \in \mathcal{M}} \prod_{e \in m} (\varepsilon(e))^2 = \sum_{m \in \mathcal{M}} \prod_{e \in m} 1 = |\mathcal{M}|$$

となる。すなわち、 Γ が交代結び目から得られる BOT グラフで、さらに重みが Dehn weighting で与えられている時、分配関数 $Z(\Gamma)$ は BOT グラフの完全マッチングの数を数えている。

結び目のマーク付きステイトと BOT グラフの完全マッチングの間には、次図のような自明な 1 対 1 対応があることが知られている。

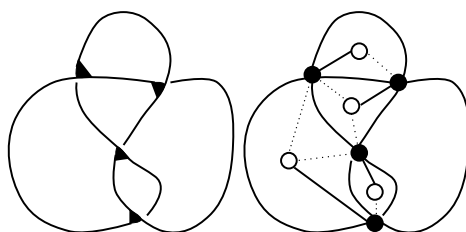


図 3 マーク付きステイトと完全マッチングの対応

[2] では、結び目が交代結び目である時、マーク付きステイトの数は結び目の行列式と一致していることが述べられているので、BOT グラフの完全マッチングの個数は結び目の行列式に他ならない。

参考文献

- [1] M.Cohen, T.Dasbach, H.Russell. A twisted dimer model for knots. arXiv:1010.5228.
- [2] L.Kauffman. Formal Knot Theory. Mathematical Notes 30 Princeton University Press 1983.
- [3] G.Kuperberg. An exploration of the permanent-determinant method. Journal of Combinatorics, 5: 707-740, 1998.
- [4] A.Madaus, M. Newman, H. Russell. Dehn coloring and the dimer model for knots. arXiv:1510.02023.

3次元組合せ多様体の Special Spine

東北大学院理学研究科数学専攻修士一年
市川 敦士

1 Link と組合せ多様体

K を単体的複体とし, $|K|$ を K の幾何学的実現とする。
 $|K|$ の各点 x に対して, x の *Link* を定義する。

定義 1.1.

$$Fc(x; K) := \{\tau \in K \mid x \in \tau\}$$

$$St(x; K) := \{\tau \in K \mid \tau \text{ を面とする } \delta \in Fc(x; K) \text{ が存在する}\}$$

$$Lk(x; K) := \{\tau \in St(x; K) \mid x \cap \tau = \emptyset\}$$

$Fc(x; K)$ は x を含む K の単体全体である。 $St(x; K)$ を x の星状複体(又は **Star**), $Lk(x; K)$ を x の絡み複体(又は **Link**) という。次に組合せ多様体を定義する。

定義 1.2. $|K|$ が n 次元組合せ多様体

$:\Leftrightarrow |K|$ の任意の点 x に対し, $|Lk(x; K)|$ は $n-1$ 次元球面, 又は $n-1$ 次元球体に同相

n 次元組合せ多様体 M に対し, M が有限個の単体からなる三角形分割をもつとき, M はコンパクトという。 $\partial M := \{x \in M \mid |Lk(x; K)| \text{ は } n-1 \text{ 次元球体に同相}\}$ とし, これを M の境界という。 M がコンパクトかつ, $\partial M = \emptyset$ のとき M を閉多様体という。

2 Simple spine と Special spine

K を単体的複体とする。 $\tau \in K$ が *principal* とは, τ は自身以外の面でないことである。 $\delta \in K$ が $\tau \in K$ の *free face* とは δ は τ と自身以外の面でないことである。

定義 2.1. K から $K \setminus (\tau \cup \delta)$ への変形を *elementary simplicial collapse* という。

P から Q へ *elementary simplicial collapse* の列で変形するとき, P は Q へ **collapse** するといいい, $P \searrow Q$ とかく。

定義 2.2. 3次元境界付きコンパクト組合せ多様体 M の部分多角形 P が M の *spine*

$$:\Leftrightarrow M \searrow P$$

M が閉多様体の場合, $M \setminus \text{Int}B^3$ の *spine* を M の *spine* とする。

定義 2.3. P をコンパクト多角形とする

P が *Simple* $:\Leftrightarrow P$ の各点 x に対し, x の *Link* が以下の 1次元多角形に同相

- (a) 円周
- (b) 円周と直径 (x を *triple line* 上の点や, *triple point* という)
- (c) 円周と3本の半径 (x を *true vertex* という)

Simple な多角形 P が *Special*

$:\Leftrightarrow P$ の *triple line* が 1-cell, かつ P の 2-component が 2-cell

定義 2.4. 3次元組合せ多様体 M の *spine* P が *simple*, 又は *special*

$:\Leftrightarrow P$ がそれぞれ *simple* な多角形, 又は *special* な多角形

定理 2.5. 全ての3次元コンパクト組合せ多様体は *Special spine* をもつ。

定理 2.6. M_1, M_2 をともに閉, 又は境界付き3次元コンパクト組合せ多様体とし, P_1, P_2 をそれぞれ M_1, M_2 の *special spine* とする. このとき, P_1 と P_2 が同相ならば, M_1 と M_2 は同相

3 多角形上の Move

Simple 多角形 P 上の **T-move** と **L-move** を別紙にて導入する。

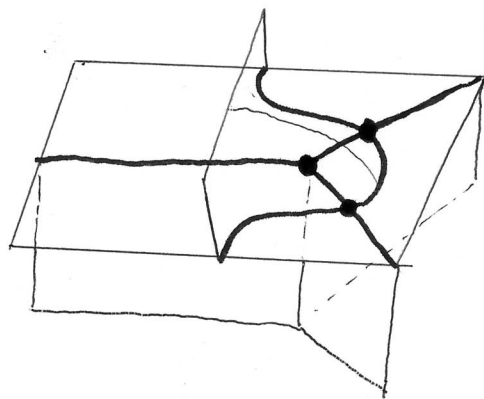
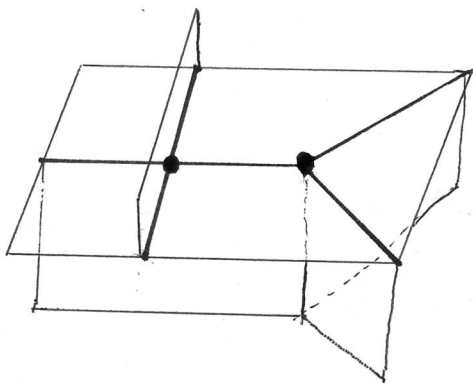
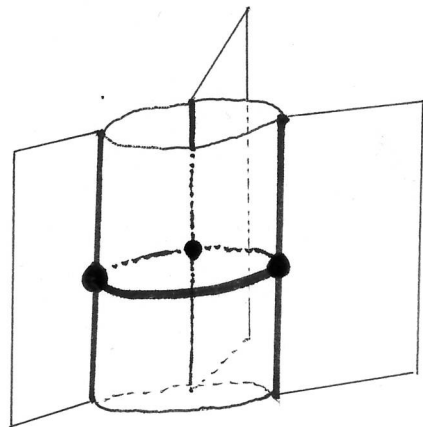
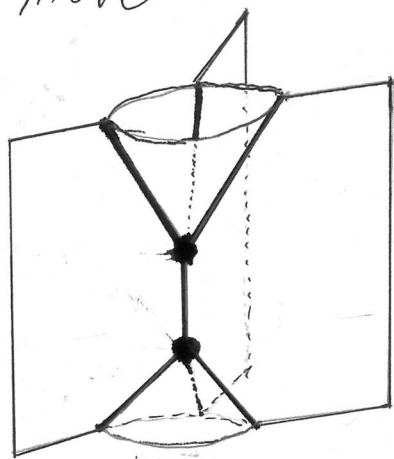
定理 3.1. 同一の3次元組合せ多様体の2つの *simple spine* は $T^{\pm 1}$ -move と $L^{\pm 1}$ -move の列で互いに変形しあう。

定理 3.2. 同一の3次元組合せ多様体の2つの *special spine* がどちらも2つ以上の *true vertex* をもつならば, $T^{\pm 1}$ -move の列で互いに変形しあう

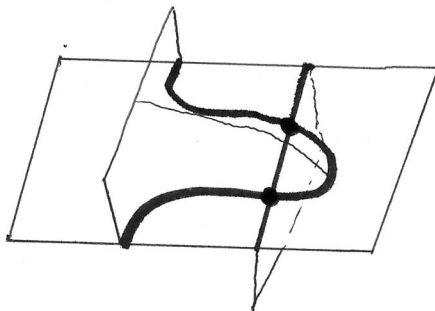
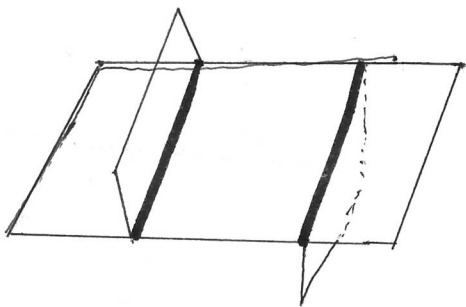
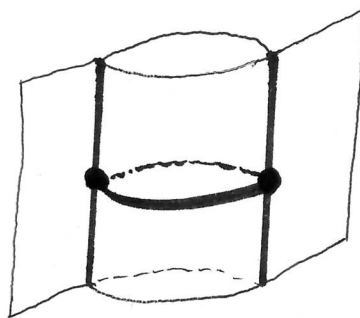
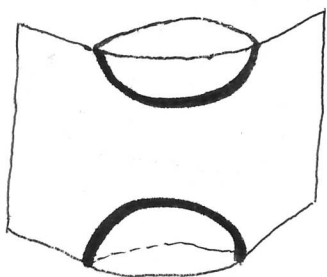
参考文献

- [1] S. Matveev, Algorithmic topology and classification of 3-manifolds, Algorithms and Computation in Mathematics, 9. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [2] 森元 勘治, 3次元多様体入門, 培風館, 1996

T-move



L-move



Flat plumbing basket について

吉村 拓也

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻

任意の絡み目が Seifert surface を持つことはよく知られている。Seifert surface を考える方法としては Seifert のアルゴリズムが有名であるが、それによって作られる曲面の形をイメージすることは少し難しい。今回は Flat plumbing basket と呼ばれる単純な特徴を持つ Seifert surface について私が知っている範囲で紹介したいと思う。

定義 1

S^3 内の Seifert surface R が境界を持つ向き付け可能な曲面 R_1 と R_2 の plumbing であるとは次の (1) および (2) を満たすときをさす:

$$(1) R = R_1 \cup R_2 \text{ および } R_1 \cap R_2 = D$$

ここで D は四角形で、その辺を順に a_1, b_1, a_2, b_2 とするとき a_i (または b_i) が ∂R_2 (∂R_1) に含まれ a_i (b_i) が R_1 (R_2) の proper な弧になっている。

(2) 以下を満たす 3次元円板 $B_1, B_2 \subset S^3$ が存在する。

$$(2.1) B_1 \cup B_2 = S^3 \text{ かつ } B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$$

$$(2.2) B_i \supset R_i \quad (i = 1, 2)$$

$$(2.3) \partial B_1 \cap R_1 = \partial B_2 \cap R_2 = D$$

D を接着領域といい、「 R は R_1 と R_2 を D に沿って plumbing して得られた」と呼ぶ。

定義 2

(1) 絡み目 L の Seifert surface F が円板 D に捻じれていないアニュラスを D 内の接着領域に沿って上から次々に plumbing したものであるとき F を flat plumbing basket と呼び、そのような Seifert surface を持つとき L は flat plumbing basket 表示を持つという。

(2) flat basket diagram \mathcal{D} とは境界に反時計回りに向きを持つ円板 D と D の proper な弧 a_1, a_2, \dots, a_n ($\partial a_i \cap a_j = \emptyset, i \neq j$) の和との組をさす。 a_i の添え字 i を弧の label と呼ぶ。

(3) \mathcal{D} について、 ∂D を正の方向に沿って弧の label を並べることにより $1, 2, \dots, n$ がそれぞれ二回ずつ現れる語 W を得られる。 W を \mathcal{D} についての flat basket code と呼ぶ。

定理 1

すべての絡み目は flat plumbing basket 表示を持つ。

定義 3

絡み目 L の Seifert surface S 上の向きづけられた単純閉曲線 k_1, k_2, \dots, k_n で \mathbb{Z} 係数 1 次元ホモロジー群の基底となっているものとする。 k_i を S の正の方向に押し出したものを k_i^+ とする。ここで $v_{ij} := \text{Link}(k_i^+, k_j)$ を成分とする n 次正方行列 $V = (v_{ij})$ を L の Seifert 行列と呼ぶ。

命題

Flat plumbing basket の Seifert 行列は対角成分が 0 の下三角行列であり, $v_{ij} = 0, \pm 1$

定義

行列式 $\det(xV^T - x^{-1}V)$ で $z = x^{-1} - x$ と置いて定まる z の整数係数多項式 $\nabla(L; z)$ を絡み目 L のコンウェイ多項式と呼ぶ. コンウェイ多項式は位相不変量であり, 特に結び目 K のコンウェイ多項式は

$$\nabla(K; z) = a_{2n}z^{2n} + a_{2n-1}z^{2n-2} + \cdots + a_2z^2 + 1$$

となることが知られている.

定理 2

自明でない結び目 K のコンウェイ多項式 $\nabla(L; z)$ を

$$\nabla(K; z) = a_{2n}z^{2n} + a_{2n-1}z^{2n-2} + \cdots + a_2z^2 + 1 (n \neq 0, a_{2n} \neq 0)$$

とする. このとき以下が成立する.

$$(1) a_{2n} = \pm 1 \Rightarrow fpbk(K) \geq 2n + 2$$

$$(2) a_{2n} \neq \pm 1 \Rightarrow fpbk(K) \geq 2n + 4$$

ここで $fpbk(K)$ は結び目 K を flat plumbing basket 表示するために必要な band の数である.

参考文献

- [1] R.Furihata, M.Hirasawa, T.Kobayashi : Seifert surface in open books, and a new coding algorithm for links, Bull.Lond.Math.Soc.40(2008), no.3, 405-414
- [2] 中島 佑介: 絡み目の flat plumbing basket 表示について. 2009 年度 佐賀大学大学院 工学系研究科 数理科学専攻 修士論文

Kneser graphの彩色数について

大阪大学 理学研究科 M1 小路史朗

§1. Introduction

このアブストラクトでは, Kneser graph と呼ばれる有限単純グラフの彩色数 (chromatic number) の問題について考える. この問題を考える際, László Lovász は与えられた有限単純グラフ (すなわち, 多重辺とループがないグラフ) の彩色数についての情報を与えるような単体複体を導入し, グラフの彩色数についての問題をその単体複体のトポロジーの問題に帰着させた. これらの Lovász が考えた単体複体は §3 で述べる.

以下, グラフは全て有限単純グラフを指すものとする.

§2. Kneser Graph and Kneser's Conjecture

Definition 2.1 $k \geq 1, n \geq 2k$ とする. 次で定義される有限単純グラフを **Kneser graph** といい, $KG_{n,k}$ と書く;

- 頂点集合は $\binom{[n]}{k}$ とする. ここで $\binom{[n]}{k}$ は, $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ の k -subset 全体からなる集合である.
- 2つの頂点 $u, v \in \binom{[n]}{k}$ が disjoint であるとき, u と v を辺で結ぶとする.

この $KG_{n,k}$ は, 次のような proper $(n - 2k + 2)$ -coloring が存在する;

$$\begin{aligned} \binom{[n]}{k} &\rightarrow [n - 2k + 2], \\ u &\mapsto \min\{\min\{x \mid x \in u\}, n - 2k + 2\}. \end{aligned}$$

よって, $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2$ となる. しかし, 実はこれは等号が成り立つ;

Theorem 2.2 (Lovász) $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$.

この組み合わせ論的な結果を 1955 年に Kneser が予想し, “Kneser's conjecture” として知られており, 20 年以上未解決であった. この問題に Lovász が初めて代数トポロジーを応用し 1977 年に証明した. その後, Imre Bárány は, Lovász よりもエレガントで短い証明方法を発見した. さらに, 2002 年に Greene は Bárány の証明を簡略化した証明を与えた. Greene は次の Theorem 2.3 (特に 2 の主張) と Lemma 2.4 を用いて, Lovász とは全く別のアプローチで Kneser's conjecture を証明した.

Theorem 2.3 (Borsuk-Ulam)

次の 2 つが成り立ち, さらにそれらは同値である;

1. 連続写像 $f: S^n \rightarrow S^m$ が antipodal map であれば, $n \leq m$ である.
2. S_1, \dots, S_n を S^n の開集合もしくは閉集合とし, $\{S_1, \dots, S_n, S_{n+1}\}$ が S^n を被覆しているとする. このとき, antipodal pair を含むような S_i ($i = 1, \dots, n + 1$) が存在する.

Lemma 2.4 任意の $n > d \geq 1$ に対して, $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ 上の n 個のベクトルの集合 X であって, $|S| = d + 1$ であるような任意の $S \subset X$ の元が一次独立であるようなものが存在する.

§3. The Neighborhood Complex and Lovász Complex

Lovász は与えられたグラフの chromatic number の lower bound を求めるために、グラフから定まる単体複体をいくつか導入した。ここでは、その中から neighborhood complex と Lovász complex を紹介し、Lovász による Kneser's conjecture の証明の概略 (方針といったほうが正しいかもしれない) を述べる。

$G = (V, E)$ をグラフとする。各 $A \subset V$ に対して、

$$\nu(A) := \{ v \in V \mid va \in E \text{ for all } a \in A \} (\subset V)$$

と定める。便宜上、 $\nu(\emptyset) := V$ と約束する。 ν を **neighbor set function** という。

Definition 3.1 $G = (V, E)$ をグラフとする。

$$N(G) := \{ A \subset V \mid \nu(A) \neq \emptyset \}$$

と定めると、これは (抽象) 単体複体となる。これを G の **neighborhood complex** という。

Example 3.2 ① $E = \emptyset$ であるグラフの neighborhood complex は \emptyset である。

② odd cycle の neighborhood complex は、また同じ odd cycle になる。

③ 長さ 6 以上の even cycle の neighborhood complex は、2 つの disjoint cycle からなるグラフとなる。各 cycle の長さは、元の cycle の長さの半分となる。

④ K_n を頂点が n 個の完全グラフとする。このとき、 $N(K_n) = \partial \Delta^{n-1}$ となる。よって、 $|N(K_n)| \cong \mathbb{S}^{n-2}$ である。

Proposition 3.3 $\text{conn}(|N(KG_{n,k})|) = n - 2k - 1$ 。ここで、一般に位相空間 X に対して $\text{conn}(X) \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ とは、 X が n -connected となるような最大の n のことである。

$G = (V, E)$ をグラフとしたとき、

$$C(G) := \{ A \subset V \mid A \neq \emptyset, A \neq V, \nu^2(A) = A \}$$

と定める。

Definition 3.4 poset $(C(G), \subset)$ の order complex を **Lovász complex** といい、 $L(G)$ で表す。

一般に、poset P の order complex を $\Delta(P)$ と表すことにする。 $N(G)$ の face poset を $F(N(G))$ と書くことにすると、 $C(G) \subset F(N(G))$ より、 $L(G) = \Delta(C(G)) \subset \Delta(F(N(G))) = \text{sd}(N(G))$ となる。よって、 $L(G)$ は $\text{sd}(N(G))$ の subcomplex となっていることが分かる。

Lovász は、次のような neighborhood complex を用いて記述される chromatic number の lower bound を与えた。

Theorem 3.5 (Lovász) G をグラフとすると、次の不等式を満たす；

$$\chi(G) \geq \text{conn}(|N(G)|) + 3$$

この定理の証明は、Lovász complex の種々の性質 ($|L(G)| \simeq |N(G)|$ や $|L(G)|$ に free \mathbb{Z}_2 -action が入ることなど) と Borsuk-Ulam (Theorem 2.3 の 1) などを使うとできる。

Proposition 3.3 と Theorem 3.5 より、 $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$ が分かる。これと $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2$ より、Kneser's conjecture が証明できた。これが Lovász による証明である。

Reference

[1] Mark de Longueville, "A Course in Topological Combinatorics", Springer, 2013.

結び目の線形群表現

勝又 仁志

東北大学大学院理学研究科 修士 1 年

基本群の表現に対しては Ideal Point を考えることができるが、この Ideal Point が結び目の群表現によって存在や一意性が変化する。この Ideal Point と結び目の種類に関する事実を示す。

1 定義 1: Ideal Point

- C : アフィン代数的曲線
- C' : C を射影曲線に完備化し、特異点を解消した曲線 (双有利対応の下で一意的)
- C^* : C の任意の完備化射影この時、 C' の Ideal Point とは、 C' と C^* の双有利対応の下で $C^* - C$ の元に一致する点

2 定義 2: 三葉結び目 (trefoil knot) K の表現

- $G = \langle a, b, c \mid c = bab', a = abc', b = aca' \rangle$
を三葉結び目群という。但し、 a' は a の逆元を示すものとし、基本群の積は右から左に掛けるとする。以下も同様。
- m : G 内の K の緯線
- l : G 内の K の経線

3 定義 3: 三葉結び目群の表現

$\rho: G \rightarrow SL(2, C)$ 準同形
を群の表現とすると、以下が成立。
 $(A, B, C) = (\rho(a), \rho(b), \rho(c))$ とおけば G の表現で次の関係を満たすものが存在。

- $C = BAB'$

- $A = CBC'$
- $B = ACA'$
 (A, B, C は全て共役であることから、これらの固有値は等しい。
 また、これらは定義より $SL(2, C)$ に含まれるので、固有値は λ, λ' とおくことが出来る。)

ここで、 $M[X]$ を行列 X に対するメビウス変換、 x_1, x_2 を $M[X]$ による固定点とすると、以下は同値。

- $C = BAB'$
- $M[B](a_1) = c_1$
- $M[B](a_2) = c_2$
- $(a_1 - b_1)(c_1 - b_2) = \lambda^2(a_1 - b_2)(c_1 - b_2)$
- $(a_2 - b_1)(c_2 - b_2) = \lambda^2(a_2 - b_2)(c_2 - b_2)$

(他の 2 式でも同様に成立)

また、次の補題が成立。

補題 4: 表現の $trace$ と三葉結び目群の Ideal point に対し、

$$trace[\rho(m)]$$

が発散しない場所では Ideal Point は存在しない

上の補題より、

「Ideal Point が存在するならば、各 Ideal Point で

$$trace[\rho(m)] = |\lambda + \lambda'|$$

は発散する」

が成立。よって、三葉結び目群で Ideal Point を探す際は λ の値が大きな部分を探せばよい。

以上の議論は、Ideal Point の定義に関しては文献 [1] を、その他の議論は文献 [2] を参照する。

参考文献

- [1] Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds, M.Culler, P.B.Shalen
- [2] How to construct ideal points of $SL_2(C)$ representation spaces of knot groups, T.Otsuki

HOMFLY 多項式と内部多項式

嘉藤 桂樹

Jones 多項式の発見以来、さまざまな結び目の多項式不変量とグラフの多項式の間関係がわかってきた。このことは結び目理論とグラフ理論には密接な関係があるということを示している。今回はそのうちの HOMFLY 多項式 [2] と hypergraph の内部多項式 [3][4][5] の関係について述べる。

1 HOMFLY 多項式

S^3 上に滑らかに埋め込まれた S^1 を結び目と呼ぶ。このとき結び目には向きをつける。これを二次元平面に射影して、上下の情報がわかるように書いたものを結び目の図式と呼ぶ。この結び目の多項式不変量として、Alexander 多項式や Jones 多項式、Kauffman 多項式が発見されてきた。HOMFLY 多項式は以下のように定義された二変数多項式不変量である。

Definition 1.1. HOMFLY 多項式 $P_L(v, z)$ は以下のようにして帰納的に定義する。

- (i) $P_{\text{自明な結び目}} = 1$
- (ii) 3つの図式、 D_+ , D_- , D_0 はある一部分だけが下図のように異なっており、それ以外の部分は一致しているものとする。このとき、 $v^{-1}P_{D_+} - vP_{D_-} = zP_{D_0}$

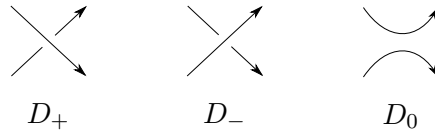


図 1: スケイントリプル

HOMFLY 多項式は Alexander 多項式 $\Delta(t)$ と Jones 多項式 $V(t)$ の両方の情報を含んでいる。実際、 $\Delta(t) = P(1, t^{1/2} - t^{-1/2})$ と $V(t) = P(t, t^{1/2} - t^{-1/2})$ という関係式が成り立っている。ここで、HOMFLY 多項式の係数が零でない項に注目すると、以下のように変形できる。

$$P_L(v, z) = \sum_{i=m}^M p_i(v) z^i$$

ここで、 M は HOMFLY 多項式の z 指数の最大値である。この M は結び目の交点数 $c(D)$ とザイフェルト周の個数 $s(D)$ で以下のようにおさえられることが知られている [6]。

Theorem 1.2. 任意の向き付けられた結び目図式 D に対して、 $M \leq c(D) - s(D) + 1$ が成り立つ。

ここで、 $n(D) = c(D) - s(D) + 1$ とおく。 $p_{n(D)}(v)$ を HOMFLY 多項式 $P_L(v, z)$ の “top” と呼び、 $\text{Top}(P_L)(v)$ と書くこととする。

2 内部多項式

hypergraph $\mathcal{H} = (V, E)$ は、頂点集合 V と hyperedge 集合 E からなる。ここで、 V は有限集合で、 E は V の空でない部分集合からなる集合である。 V と E の元を頂点とし、 E の元が V の元を含んでいるときにその二つの頂点を辺で結ぶことで二部グラフ $\text{Bip}\mathcal{H}$ が得られる。以下、 $\mathcal{H} = (V, E)$ は $\text{Bip}\mathcal{H}$ が連結している hypergraph とする。

Definition 2.1. $\mathcal{H} = (V, E)$ を hypergraph とする。関数 (もしくはベクトル) $\mathbf{f}: E \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ について、 \mathbf{f} が \mathcal{H} の hypertree であるとは、 $e \in E$ に $\mathbf{f}(e) + 1$ 本の辺を隣接させることで $\text{Bip}\mathcal{H}$ の spanning tree が見つけられるものであるとする。

\mathcal{H} のすべての hypertree の集合を $Q_{\mathcal{H}}$ と書く。

Definition 2.2. E に順序をつける。hypertree \mathbf{f} について、 $\mathbf{f}(e)$ を 1 だけ減少させて、 e より小さい hyperedge の \mathbf{f} を 1 だけ増加させても、別の hypertree が構成できるとき、hyperedge $e \in E$ は internally inactive であるという。

Definition 2.3. $\mathcal{H} = (V, E)$ は hyperedge に順序が与えられているとき、 $\bar{i}(\mathbf{f})$ を internally inactive である hyperedge の個数とする。このとき、 \mathcal{H} の内部多項式を以下で定義する。

$$I_{\mathcal{H}}(\xi) = \sum_{\mathbf{f} \in Q_{\mathcal{H}}} \xi^{\bar{i}(\mathbf{f})}.$$

この多項式は、順序によって変わらない。また、古典的グラフ不変量である Tutte 多項式の一般化になっている。

3 2つの多項式の関係

二部グラフの内部多項式を、その二部グラフとから得られる hypergraph の内部多項式から得る。また、二部グラフ $G = (V_0, V_1, E)$ の辺に下図のような交点を対応させることで特殊交代結び目 L_G が得られる。このとき、以下の公式が成り立つ [5]。

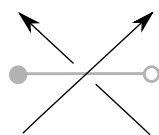


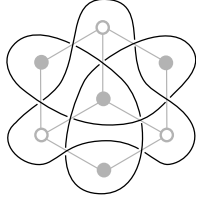
図 2: G から得られる L_G の交点.

Theorem 3.1. 任意の平面二部グラフ $G = (V_0, V_1, E)$ に対して、

$$\text{Top}P_{L_G}(v) = v^{|E| - (|V_0| + |V_1|) + 1} I_G(v^2)$$

この二部グラフは特殊交代結び目の Seifert グラフになっている。また、特殊交代結び目は $*$ -product により homogenous link を構成する [1]。このとき、 $\text{Top}(P_{D_1 * D_2}) = \text{Top}(P_{D_1})\text{Top}(P_{D_2})$ であることが知られている [7]。したがって、任意の homogenous link の HOMFLY 多項式の Top は、その Seifert グラフの内部多項式を計算することで得られる。最後に、具体例をひとつ挙げて、終わりにする。

Example 3.2. G を図3のような平面二部グラフとすると、 L_G が G から得られる特殊交代結び目になる。このとき、 I_G と P_{L_G} が以下のように計算できる。 $\text{Top}(P_{L_G}) = 1v^3 + 3v^5 + 3v^7$ と I_G の係数が一致しているのがわかる。



$$I_G = 1\xi^0 + 3\xi^1 + 3\xi^2.$$

$$P_{L_G}(v, z) = \begin{matrix} +1v^3z^3 & +3v^5z^3 & +3v^7z^3 \\ +3v^5z & +4v^7z & -4v^9z \\ +2v^7z^{-1} & -3v^9z^{-1} & +1v^{11}z^{-1}. \end{matrix}$$

図 3: 特殊交代結び目の内部多項式と HOMFLY 多項式

参考文献

- [1] P. R. Cromwell, Homogeneous link, J. London Math. Soc. (2)39(1989), 535-552
- [2] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12(1985), 239-246
- [3] T. Kálmán, A version of Tutte's polynomial for hypergraphs, Adv. Math. 244(2013), 823-873
- [4] T. Kálmán and H. Murakami, Root polytope, parking functions, and the HOMFLY polynomial, arXiv:1305.4925(2013)
- [5] T. Kálmán and A. Postnikov, Root polytope, Tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite graph, arXiv:1602.04449(2016)
- [6] H. R. Morton, Seifert circles and knot polynomial, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 99(1986), 107-109
- [7] K. Murasugi and J. Przytycki, The skein polynomial of a planar star product of two links, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 106(1989), 273-276

クイバーのミュートーションと結び目の不変量

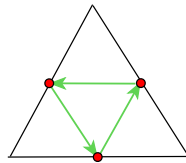
水野勇磨

東京工業大学 数理・計算科学系 修士一年

私は、クイバーのミュートーションやクラスター変換を用いて、結び目や3次元多様体の不変量を調べるとい研究をしています。

1 クイバーのミュートーションと四面体

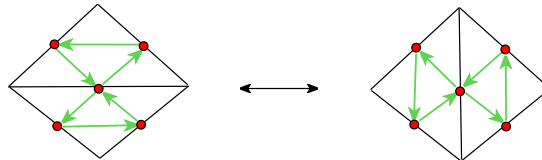
クイバーというのは有向グラフのことです。トポロジーの文脈で重要になるのは曲面の三角形分割から来るクイバーです。それは、三角形分割の各三角形に対して次のようなクイバーを考えることによって得られます。



クイバーの頂点 k でのミュートーションとは次のような操作のことです。

- 矢印 $i \rightarrow k \rightarrow j$ について、矢印 $i \rightarrow j$ を加える。
- k にくっついている矢印の向きを反転させる。
- 矢印 $i \rightarrow j$ と $j \rightarrow i$ のペアを消す。

ミュートーションは三角形分割から来るクイバーにおいては、三角形分割のフリップと呼ばれる操作に対応しています：



フリップは3次元的にみると四面体と思えるので、「ミュートーション \simeq フリップ \simeq 四面体」という対応になっています。この対応が、クイバーのミュートーションと3次元多様体に関係する理由です。

通常、クイバーに対してミュートーションを行う場合、一回だけミュートーションをするのではなく、繰り返しミュートーションをすることを考えます。ここでは特にミュートーションの列と境界条件の組である

ミューテーション・ループ

$$Q(0) \xrightarrow{\mu_{m_1}} Q(1) \xrightarrow{\mu_{m_2}} \dots \xrightarrow{\mu_{m_T}} Q(T), \quad \phi : Q(T) \simeq Q(0)$$

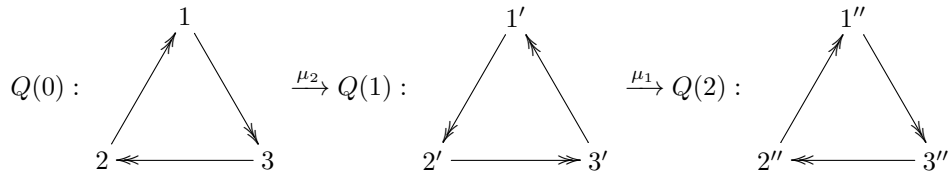
を考えます。ただし、境界条件 ϕ は $Q(T)$ と $Q(0)$ の頂点の同一視とします。

ここで、ミューテーション・ループ中のクイパー $Q(t)$ の頂点 i にクラスター y 変数 $y_i(t)$ を次の規則で割り当てるを考えます。

$$y_i(t+1) = \begin{cases} y_k(t), & i = m_t \\ y_i(t)(1 + y_k(t))^b, & i \text{ から } m_t \text{ へ } b \text{ 本の矢印が向かっている} \\ y_i(t)(1 + y_k(t)^{-1})^{-b}, & m_t \text{ から } i \text{ へ } b \text{ 本の矢印が向かっている} \end{cases}$$

ただし、 $Q(0)$ の頂点 i に割り当てられる変数を $y_i(0) = y_i$ とします。 $Q(0)$ の頂点を $1, \dots, n$ としたとき、上の規則を帰納的に用いることによって、 $y_i(t)$ は y_1, \dots, y_n たちの有理式で書けます。クラスター y 変数は 3 次元多様体の文脈では双曲構造のパラメーターに対応していることが知られています。

具体例で見てみましょう。ミューテーション・ループ



を考えます。ただし、境界条件 ϕ は、 $\phi(2'') = 1, \phi(3'') = 2, \phi(1'') = 3$ とします。先ほどのミューテーションと四面体の対応を用いると、このミューテーション・ループは 4_1 結び目の補空間の理想四面体分割に対応することが分かります。対応するクラスター y 変数は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_2} \begin{pmatrix} y_1 y_2^2 (1 + y_2)^{-2} \\ y_2^{-1} \\ (1 + y_2)^2 y_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_1} \begin{pmatrix} y_1^{-1} y_2^{-2} (1 + y_2)^2 \\ y_1^2 y_2^3 (y_1 y_2^2 + y_2^2 + 2y_2 + 1)^{-2} \\ y_3 (y_2 + 1)^{-2} (y_1 y_2^2 + y_2^2 + 2y_2 + 1)^2 \end{pmatrix}$$

となります。

2 不変量の計算

ミューテーション・ループとクラスター y 変数を使って不変量の計算をしてみます。

先ほどの例に関して、

$$\tau(t) = \det \left(I_3 - t \left(\frac{\partial y_{i''}(2)}{\partial y_{\phi(j'')}} \right) \right) \Big|_{y=y^{\text{hol}}}$$

という t に関する多項式を考えます。 I_3 は大きさ 3 の単位行列です。ここで、 y^{hol} というのはクラスター y 変数の周期条件 $y_{i''}(2) = y_{\phi(i'')}$, ($i = 1, 2, 3$) を満たす解のひとつで

$$y^{\text{hol}} = \left(1, \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \right)$$

という値とします（実はこの解は 4_1 結び目の補空間の完備双曲構造に対応する解です）。実際に $\tau(t)$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \det \left(I_3 - t \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{-3}}{2} & -2 & \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \\ \frac{-3 + 5\sqrt{-3}}{2} & 5 + \sqrt{-3} & -1 - \sqrt{-3} \\ 0 & \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= 1 - 6t + 6t^2 - t^3 \end{aligned}$$

と求まります。この多項式は 4_1 結び目の Twisted Alexander 多項式という量と一致しています。実際、双曲 3 次元多様体に関する計算を行うソフトウェアである SnapPy において、

```
M=Manifold('4_1')
```

```
M.hyperbolic_adjoint_torsion()
```

と入力して求まる多項式と一致しています。一般に、写像トーラスというタイプの 3 次元多様体の Twisted Alexander 多項式は、このようにクラスター y 変数のヤコビアンの特性多項式として得られます [2]。さらに、 $\tau(t)$ において $t = 1$ としたときの値

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\tau(t)}{(t-1)} = 3$$

はトーションと呼ばれる不変量になっています。トーションは量子不変量の漸近展開に現れると予想されていて [1]、とても興味深い量です。

最後に、クイバーのミュレーションを通して不変量を捉えることのメリットについて述べておきます。先ほどの例では曲面から来るクイバーを考えましたが、多くのクイバーはそのような幾何学的な由来を持たないものです。逆に言えば、3 次元多様体の概念をクイバーのミュレーション・ループに一般化したと考えることができます。例えば、ディンキンクイバーというルート系由来のクイバーのミュレーション・ループの不変量を計算して、その不変量の表現論的意味（もしくは物理的意味）や、3 次元多様体の不変量との関係を調べる、といったことを考えることができます。このように 3 次元トポロジーと表現論という一見異なる分野を同じ方法で調べられる、というのがクイバーのミュレーションを考えるメリットのひとつです。

参考文献

- [1] Tudor Dimofte and Stavros Garoufalidis. The quantum content of the gluing equations. *Geom, Topol*, 17(3):1253–1315, 2013.
- [2] Takahiro Kitayama and Yuji Terashima. Torsion functions on moduli spaces in view of the cluster algebra. *Geom. Dedicata*, 175:125–143, 2015.

Teichmüller 空間の stretch line

三口 雄大

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士1年

S を双曲曲面とし, λ を S 上の極大な測地線ラミネーションとする. 孤立特異点を許した S 上の葉層構造 F と F にはいる横断的測度 α を Whitehead 変形とイソトピー変形によって同一視した同値類全体を $\mathcal{MF}(S)$ と表す.

S の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}(S)$ の点 m に対して, 次のように構成されるホロサイクリックな葉層構造を与える写像 ϕ_λ を考える. $\hat{S} \setminus \hat{\lambda}$ の成分である理想三角形 T に対して, 頂点から辺の基点までホロサイクルの弧をとることで, T 上に葉層構造 F_T を与える. F_T に横断的な弧を F_T を保つイソトピーで T の辺上にうつして長さを測ることで, F_T に横断的測度をいれる. これらを合わせて定まる S 上の測度付き葉層構造をホロサイクリックな葉層構造という.

この対応について, 次の定理が知られている.

定理 1. [Thurston] 写像 $\phi_\lambda : \mathcal{T}(S) \rightarrow \mathcal{MF}(S)$ は像と同相である.

$\mathcal{MF}(S) \cup \text{PMF}(S)$ は $\mathcal{MF}(S)$ のコンパクト化を与える. これを Teichmüller 空間の Thurston コンパクト化といい, $\text{PMF}(S)$ に対応する部分を Thurston 境界という.

錐 $\mathcal{MF}(S)$ の頂点から放射状に伸びる直線を ϕ_λ で対応させた Teichmüller 空間上の曲線を考える.

定義 2. (stretch line) $m \in \mathcal{T}(S)$ に対して, m を通る $\mathcal{T}(S)$ 上の曲線 $L_{\lambda,m}$ を次のように定義して, λ から定まる m を通る伸長線 (stretch line) という.

$$L_{\lambda,m} : [0, \infty) \ni t \mapsto \phi_\lambda^{-1}(e^t \phi_\lambda(m)) \in \mathcal{T}(S)$$

この伸長線の向かう先について, 次のことが知られている.

定理 3. [Papadopoulos] λ から定まる m を通る伸長線 $L_{\lambda,m}$ は Teichmüller 空間の Thurston 境界上の $[\phi_\lambda(m)]$ に収束する.

伸長線と逆の方向をもつ曲線についても考えることができる. これは錐 $\mathcal{MF}(S)$ の頂点に向かう直線を ϕ_λ で対応させた Teichmüller 空間上の曲線である.

定義 4. (antistretch line) $m \in \mathcal{T}(S)$ に対して, m を通る $\mathcal{T}(S)$ 上の曲線 $L_{\lambda,m}^-$ を次のように定義して, λ から定まる m を通る反伸長線 (antistretch line) という.

$$L_{\lambda,m}^- : [0, \infty) \ni t \mapsto \phi_\lambda^{-1}(e^{-t} \phi_\lambda(m)) \in \mathcal{T}(S)$$

λ がよい性質をみたととき, 反伸長線に対しても伸長線と同様な主張が成り立つことが知られている.

λ との交点数が 0 である $\mathcal{MF}(S)$ の任意の元 F に対して, $[F] = [\lambda]$ が成り立つとき, λ は一意エルゴード的 (uniquely ergodic) であるという.

定理 5. [Papadopoulos] λ が一意エルゴード的であるとき, λ から定まる任意の反伸長線は Teichmüller 空間の Thurston 境界上の $[\lambda]$ に収束する.

横断的測度がある λ のコンパクトな部分ラミネーションを $\text{stump}(\lambda)$ と表す. $\text{stump}(\lambda)$ に交点数で横断的測度を与えた測度付き葉層構造を $\text{stump}(\lambda)$ の重心 (barycenter) という. $\text{stump}(\lambda)$ が単純閉測地線からなっていて, λ の残りの成分が $\text{stump}(\lambda)$ の成分から見て同じ向きに巻きついているとき, λ は初等的 (elementary) であるという.

定理 6. [Théret] λ が初等的であるとき, λ から定まる任意の反伸長線は Teichmüller 空間の Thurston 境界上の $\text{stump}(\lambda)$ の重心に収束する.

参考文献

- [1] Guillaume Théret : On elementary antistretch lines, *Geom Dedicata*(2008)136, 79-93.
- [2] Athanase Papadopoulos : On Thurston's boundary of Teichmüller space and the extension of earthquakes, *Topology and its Applications* 41(1991), 147-177.

Lie 代数に現れる特異点

九州大学大学院数理学府修士 1 年 栗原寛明

Lie 代数のべき零多様体に現れる特異点について紹介したいと思います。一般の Lie 代数を扱うと長くなるので一番簡単な場合で紹介したいと思います。

Lie 群 $SL(2; \mathbb{C})$ の Lie 代数 $sl(2; \mathbb{C})$ は

$$sl(2; \mathbb{C}) = \{X \in gl(2; \mathbb{C}) | tr X = 0\}$$

で与えられます。 $gl(2; \mathbb{C})$ は $Mat(2; \mathbb{C})$ と同じです。

$sl(2; \mathbb{C})$ の一般の元は

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \quad x, y, z \in \mathbb{C}$$

と書けます。

$sl(2; \mathbb{C})$ のべき零多様体を $\mathcal{N}(sl(2; \mathbb{C}))$ を

$$\mathcal{N}(sl(2; \mathbb{C})) = \{X \in sl(2; \mathbb{C}) | det X = 0\}$$

で定義します。

X は具体的に書き下せているので $det X = 0$ という条件は $x^2 + yz = 0$ に他なりません。この多項式の零点集合 (代数多様体) は原点に特異点を持ちます。(Klein 特異点と言います。)

$x^2 + yz = 0$ は適当に変数変換すると $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ と書けます。実はこの多項式の零点集合は \mathbb{C}^2 に 2 次巡回群 C_2 を作用させたときの軌道空間を与えます。 $\mathcal{N}(sl(2; \mathbb{C}))$ には $SL(2; \mathbb{C})$ が共役作用しています。従って、

$$\mathcal{N}(sl(2; \mathbb{C})) = G \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ G \in SL(2; \mathbb{C})$$

と軌道分解します。 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が特異点を与えています。Klein 特異点を与える多項式は、

$$x^n + y^2 + z^2 = 0, \quad x^{n+1} + xy^2 + z^2 = 0, \quad x^4 + y^3 + z^2 = 0, \quad x^3y + y^3 + z^2 = 0, \quad x^5 + y^3 + z^2 = 0$$

で与えられます。各々の Klein 特異点を解消すると対応する型の双対グラフ (Dynkin 図形) が得られます。それぞれの Dynkin 図形には $A_{n-1}, D_n, E_6, E_7, E_8$ と名前が付いています。

Dynkin 図形と Lie 代数の間には

$$A_{n-1} \leftrightarrow sl(n; \mathbb{C})$$

$$D_n \leftrightarrow so(2n; \mathbb{C})$$

$$E_6, E_7, E_8 \leftrightarrow \text{難しい}$$

のような関係があります。

$sl(2; \mathbb{C})$ のときはべき零多様体の軌道は 2 つでしたが、一般にはべき零多様体はたくさんの軌道に分かれて Klein 特異点を持つ曲面を見つけることは難しくなります。

参考文献

[1] Collingwood, D.H, McGovern, W.M., Nilpotent orbits in semisimple Lie Algebras, Van Nostrand Reinhold, 1993

[2] 松澤淳一 特異点とルート系

Morse 理論とハンドル分解

伊勢 彩夏

東京工業大学 理学院数学系数学コース 修士 1 年

1 Morse 理論

M : m 次元パラコンパクト可微分多様体 (以下、多様体はすべてパラコンパクトとする)

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ -級関数

$M^a := f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$

定義 1.1 (臨界点) $p \in M$ が f の臨界点であるとは, p のまわりの座標近傍 (U, φ) において

$$\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_1}(\varphi(p)) = \dots = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_m}(\varphi(p)) = 0$$

となることである. また, 臨界点 p が非退化であるとは, f の p におけるヘッセ行列 $\frac{\partial^2(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i \partial u_j}(\varphi(p))$ が正則となることである. 臨界点 $p \in M$ における f のヘッセ行列の負の固有値の個数を p における f の指標という.

定義 1.2 (n -胞体) 位相空間 X に対して, 次の性質を満たす部分集合 e を X の n -胞体という:

ある連続写像 $\psi: I^n \rightarrow \bar{e}$ が存在して

$$\psi(I^n) = \bar{e}, \quad \psi(\partial I^n) \subset \partial e,$$

かつ, ψ は $I^n - \partial I^n$ を $\bar{e} - \partial e$ に同相に写す;

\bar{e} は e の閉包, $\partial e = \bar{e} - e$ とする. また, \bar{e} を閉胞体, e を開胞体, ∂e を e の境界という.

X の n -胞体を, 次元を明記するために e^n のように表わすことにする.

定義 1.3 (胞複体) Hausdorff 空間 K が次の条件を満たすとき, K を胞複体という.

- (i) K は互いに共通点のない開胞体の和集合として表されている.
- (ii) K の次元 n の任意の胞体を e^n とすると, ∂e^n は, 次元が $n-1$ 以下の K に属する胞体の和集合に含まれる.

胞複体 K の胞体の個数が有限のとき, 有限胞複体という. K を胞複体とし, L を K の部分集合とする. L が K の部分複体であるとは, $e \cap L \neq \emptyset$ なる K の任意の胞体 e に対して, $e \subset L$ が成り立つことである. 部分複体は胞複体の構造を持つ.

定義 1.4 (CW-複体) 胞複体 K が次の条件を満たすときに CW-複体であるという.

- (i) (局所有限の条件) K の各胞体 e に対し, e を含む K の有限部分複体が存在する.
- (ii) (弱位相の条件) K の任意の集合 S が閉集合となるための必要十分条件は, K のすべての胞体 e に対して, $S \cap \bar{e}$ が閉集合となることである.

有限 CW-複体の任意の部分複体は閉集合で、またそれ自身 CW-複体となる。CW-複体 K はパラコンパクトであり、 K がコンパクトならば有限複体である。CW-複体は、次元の小さい順番に胞体を境界で貼り合わせていくことで得られる。

定理 1.5 f は非退化な臨界点を持つ多様体 M 上の可微分関数とし、各 M^a はコンパクトとする。そのとき、 M は、指標 λ の各臨界点に対して次元 λ の一つの胞体を持つような、CW-複体と同じホモトピー型を持つ。

2 ハンドル分解

定義 2.1 (ハンドル) $0 \leq k \leq n$ に対して n 次元 k ハンドル $h^k := D^k \times D^{n-k}$

X : n 次元多様体

ある埋め込み $\varphi: \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial X$ によって、ハンドルは多様体 X の境界にくっつけられる。

h^k において、 $D^k \times 0$ をコア、 $0 \times D^{n-k}$ をココア、 φ を接着写像、 $\partial D^k \times D^{n-k}$ を接着領域、 $\partial D^k \times 0$ を接着球面、 $0 \times \partial D^{n-k}$ をベルト球面、 k をハンドルの指数という。

定義 2.2 (ハンドル分解) X をコンパクトな n 次元多様体とする。 ∂X が、コンパクトな $\partial_+ X$ と $\partial_- X$ の直和で表せるとする。 X が向き付け可能のとき、 $\partial X = \partial_+ X \sqcup \partial_- X$ で X の向きを決める。 X の $\partial_- X$ を土台とするハンドル分解とは、 $I \times \partial_- X$ にハンドルをくっつけていくことで得られる多様体と X を同一視することである。このようなハンドル分解を $(X, \partial_- X)$ のハンドル分解と表す。

h^k のコアは k -胞体になっているので、 h^k は e^k の変位レトラクトであるため、 h^k を多様体にくっつけるのは e^k をくっつけるのと同じだと考えられる。よって、滑らかでコンパクトな任意の多様体 $(X, \partial_- X)$ は、定理 1.6 からハンドル分解できることがわかる。

命題 2.3 コンパクトな $(X, \partial_- X)$ のハンドル分解は、ハンドルの指数が増加する順番にハンドルを付け替えることができる。

命題 2.4 (ハンドルのキャンセル) $0 \leq k \leq n$ として、 $k-1$ ハンドル h^{k-1} のベルト球面と k ハンドル h^k の接着球面が一点で横断的に交わるとき、 h^{k-1} と h^k はキャンセルすることができる。

定義 2.5 (アイソトピー) $\varphi_0, \varphi_1: Y \rightarrow X$, 滑らかな埋め込み

$\varphi: [0, 1] \times Y \rightarrow X$, 滑らか

$\varphi_t(y) := \varphi(t, y)$

このとき、 φ_t が φ_0 と φ_1 の間の滑らかなアイソトピーであるとは、 $\forall t \in [0, 1]$ に対して φ_t が埋め込みになっていることである。

また、アイソトピー φ_t に対してアイソトピー $\Phi: X \rightarrow X$ が全域アイソトピーであるとは、 $\forall t \in [0, 1]$ に対して Φ_t が微分同相で、 $\Phi_0 = id_X$ かつ $\varphi_t = \Phi_t \circ \varphi_0$ のことである。

定理 2.6 (アイソトピー拡張定理) Y がコンパクトであるとき、アイソトピー $\varphi: Y \rightarrow \text{int} X$ は全域アイソトピー Φ に拡張することができる。

定理 2.7 V^m を m 次元 C^∞ 多様体で $\partial V^m = \emptyset$ とし、 W_1^n, W_2^q を V^m の部分多様体で次元がそれぞれ n, q であるとする。もしも、 $n+q < m$ であって、 W_1^n, W_2^q のうちいずれかがコンパクトならば、 V^m の全域アイソト

ピー $F: V^m \times \mathbb{R}$ で, $F(x, t) = (f_t(x), t)$ とおくと, $W_1^n \cap f_1(W_2^q) = \emptyset$ となるものが存在する.

系 2.8 $X: n$ 次元多様体

$l \leq k$ として, X に h^k をくっつけたのちに, $X \cup h^k$ に h^l がくっついているとする. このとき, h^k の接着球面と h^l のベルト球面が交わらないようにずらすことができる.

定義 2.9 (スライド) h_1, h_2 を k -ハンドル ($0 < k < n$) で, ∂X に接着されているものとする. h_2 を渡る h_1 のスライドとは, 以下の手順で与えられる:

1. h_1 の接着球面 (= A) をアイソトピーによって $\partial(X \cup h_2)$ 上で滑らせて h_2 のベルト球面 (= B) を通過させる.
2. ちょうど中間地点で A と B は一点で交わる.
3. h_1, h_2 はともに $D^k \times D^{n-k}$ であるので, $\dim A = k - 1$, $\dim B = n - k - 1$ であり, $\dim \partial(X \cup h_2) = n - 1$ より, $\dim A + \dim B < \dim \partial(X \cup h_2)$. よって系 2.8 より A を B からずらすことができる. ここで, A が来た方に戻らないような方向にずらす.
4. 全域アイソトピーにより A を h_2 から完全に分離する.

定理 2.10 $(X, \partial X)$ の任意の 2 つのハンドル分解 (指数の増加順になっているもの) は

- スライド
- ハンドルをキャンセルもしくは復元する

によって移り合う.

参考文献

- [1] J. ミルナー 著, 志賀浩二 訳, モース理論, 吉岡書店.
- [2] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, 4-Manifolds and Kirby Calculus, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Math. Society, Providence 1999.
- [3] 田村一郎, 微分位相幾何学, 岩波書店.

$SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士後期課程 1 年
稲垣友介

概要

講演では, Culler-Shalen [2] の与えた $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体の定義を解説するので, その背景等を本稿で述べたい.

1 $PSL(2, \mathbb{C})$ -表現と双曲多様体

指標多様体の研究の動機づけを与えるため, まずは双曲多様体に触れる. 詳細については, 例えば [17] や [22] を参照して頂きたい. 一般に双曲多様体とは, 断面曲率が定数 -1 であるような多様体のことを指す. 本稿では低次元, 特に 2, 3 次元多様体について考察を行うが, これらの多様体に対しては幾何構造に関する分類が与えられており, ほとんど双曲的であることが知られている. 例えば, 向き付け可能な閉曲面の分類を考えれば, 種数 2 以上の曲面はすべて双曲的である. 3 次元多様体でも, Thurston の幾何化予想 (定理) などを見れば実感して頂けると思う [18]. さて, その双曲 2, 3 次元多様体たちだが, 曲率を用いずに, 別の観点から特徴付けを与えることができる. 以下これを簡単に見てみる.

準備を行う. 上半空間を \mathbb{H}^n で表し, 標準的な双曲計量を入れておく. 更に, その向き付けを保つ等長変換群を $Isom^+(\mathbb{H}^n)$ とおく. ここで, $Isom^+(\mathbb{H}^n)$ の \mathbb{H}^n への作用は推移的であることに注意されたい. さて, 双曲多様体 M を考える. このとき M は $(\mathbb{H}^n, Isom^+(\mathbb{H}^n))$ -構造を有する. ここで $(\mathbb{H}^n, Isom^+(\mathbb{H}^n))$ -構造とは, ざっくり言えば, 局所座標系として, 上半空間への上への同相写像がとれ, それら近傍の張り合わせが $Isom^+(\mathbb{H}^n)$ で与えられるような構造のことである. この構造があると, M 上の任意の道を \mathbb{H}^n 上に “展開” することができる. 従って普遍被覆 \tilde{M} から \mathbb{H}^n への展開写像 D というものを考えることができる. 基本群の与える普遍被覆上の変換は, D を通して上半空間上の変換を与え, その変換は $Isom^+(\mathbb{H}^n)$ の元として表される. 即ち, 任意の基本群の元 γ に対して, $g_\gamma \circ D = D \circ \gamma$ を満たす等長変換 $g_\gamma \in Isom^+(\mathbb{H}^n)$ が存在する.

この基本群の元から等長変換群の元への対応は群準同型写像を与え, ホロノミー表現などと呼ばれている. 特に M が完備であるとき, M は商空間 $\mathbb{H}^n / \rho(\pi_1(M))$ と表される. この商空間としての表示が双曲多様体 M のもう一つの見方である. 基本群のホロノミー表現による像は, 等長変換群の部分群となるが, 特に上半空間に真正不連続かつ自由に作用する離散部分群であることに注意しよう. この意味で, 双曲多様体とは上半空間の, ある種の離散群による商空間ととらえることができるのである.

完備双曲多様体を考えるにあたって, 等長変換群の離散部分群が重要な役割を果たすことを述べた. ここで話を 2, 3 次元に制限してみよう. よく知られているように, $Isom^+(\mathbb{H}^2) = PSL(2, \mathbb{R})$ であり, $Isom^+(\mathbb{H}^3) = PSL(2, \mathbb{C})$

である。(1次分数変換を通じた対応.)従って,先に述べたホロノミー表現は基本群から $PSL(2)$ への表現のことを指している.特にこの表現は離散忠実的である.このようにして,2,3次元双曲多様体は $PSL(2)$ への表現へと結びつけられるのである.

2 双曲構造

多様体を計量を含めて考えたとき,位相同値より少々硬い意味で多様体の違いをとらえることができ,計量の違いまで含めた多様体の等長類の分類を考えたり,その変形を追うことができる.これがよく双曲多様体のモジュライ理論と呼ばれるもので,特に双曲多様体の変形を考えるときには,双曲構造の変形理論と呼ばれる.この双曲多様体の変形理論を考える際に先に述べた基本群の表現との対応付けがうまく機能する.双曲構造の変形は基本群の $PSL(2)$ -表現の変形と対応付けられるのである.その意味で,基本群の離散忠実的 $PSL(2)$ -表現の全体を考えることは低次元双曲多様体の変形をとらえることに相当する.基本群の離散忠実的 $PSL(2)$ -表現の全体(の共役同値類全体)は,双曲曲面の時には Teichmüller 空間,双曲3次元多様体の時には Klein 群の変形空間と呼ばれるものである.以上が,(離散忠実な)表現全体を考える動機付けになって,指標多様体というものが考えられるようになった.指標多様体とは,より一般に,基本群の表現全体を幾何的にとらえた対象である.従って先にあげた変形空間たちよりも大きい空間となっている.ただし,幾何学的意味のない表現たちも含んでしまっていることに注意しておく. Teichmüller 空間やクライン群に関しては [12], [16], また [21] などを参照.

3 $SL(2, \mathbb{C})$ -指標多様体

一般に指標多様体は,様々な線型 Lie 群について定義されるが,本節以降では $SL(2, \mathbb{C})$ に対する指標多様体のみ議論をする.なお一般の指標多様体の定義は [14] に詳しい.単純に表現といえば,それは $SL(2, \mathbb{C})$ -表現を考えているものと理解されたい.指標多様体とは,ある有限生成群に対する指標全体に代数多様体としての幾何学的構造を入れた対象である.ここで,有限生成群 Γ の表現 ρ に対する指標とは,写像

$$\chi_\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g)) \quad (g \in \Gamma)$$

のことを指す.従って指標多様体とは集合としては

$$X(\Gamma) = \{\chi_\rho : \text{character} \mid \rho \in \text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))\}$$

のことである. Culler-Shalen は,1983年にこの指標多様体に対して,比較的初等的な代数幾何学の議論で,代数多様体としての実現を与えた.この実現の方法は構成的である.まず,有限生成群 Γ の表現全体 $R(\Gamma) = \text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))$ には, Γ の関係子たちが定義方程式を与えるアフィン代数的集合が入ることに注意する. Culler-Shalen は $R(\Gamma)$ に対して標準的に定まる正則写像を構成し,その像が上の集合 $X(\Gamma)$ と一致すること,および代数的集合になることを示した.なお,上記の標準的に定まる写像は具体的に式で書ける.従って,指標多様体は理論的には計算可能な対象である.以上が Culler-Shalen による指標多様体の定式化の概略である.

4 Culler-Shalen 理論

Culler-Shalen は [2] において指標多様体を定義しただけでなく、3次元多様体に含まれる本質的曲面の構成に関する定理を指標多様体を用いて次のように示した。指標多様体はアフィン代数的集合であるから、射影空間に埋め込み、特異点を解消することでスムーズモデルを考えることができる。この操作で“増える”点のことを理想点と呼ぶ。これはアフィンモデルから見れば無限遠点に対応する。理想点から、基本群が反転なしに作用する樹を構成し、基本群の Bass-Serre [19] の意味での群の分解を与える。この結果、3次元多様体に含まれる曲面が得られ、適切な操作を行うことで本質的な曲面を得ることができる。この構成法を Culler-Shalen 理論と呼ぶ。以上に述べた指標多様体の定義や Culler-Shalen 理論は元論文 [2] はもちろん、[20] も大変参考になる。

5 指標多様体理論の高次元化

ここまでは主に $SL(2)$ に関する議論であったが、近年、 $SL(n)$ や $GL(n)$ への一般化が研究されている。いくつか紹介してみよう。

・ $SL(n, \mathbb{R})$ -指標多様体, 高次元 Teichmüller 理論

始まりは Hitchin による、微分幾何のバンドルの理論を用いることによる Teichmüller 空間の高次元化である [9]。指標多様体の言葉を用いれば次のようになる。一般に Teichmüller 空間は先に述べたように、 $SL(2, \mathbb{R})$ 離散忠実な表現の共役類の集合に対応する。これら離散忠実表現に、標準的な $SL(2, \mathbb{R})$ の $SL(n, \mathbb{R})$ への既約表現を結合させたものを考える (Hitchin 表現)。 $SL(n, \mathbb{R})$ -指標多様体の成分で Hitchin 表現の共役類たちを含むものが、高次元 Teichmüller 空間と呼ばれるものである。また、高次元 Teichmüller 理論は Fock-Goncharov [3] により代数的な手法でもアプローチされている。この手法は以下で述べられるように3次元多様体に対しても応用がされつつある。

・ $SL(n, \mathbb{C})$ -指標多様体, 高次元 Culler-Shalen 理論

2014年に、原-北山が、Culler-Shalen 理論の高次元化を与えた [10]。すなわち $SL(n, \mathbb{C})$ -指標多様体の理想点からも3次元多様体に含まれる曲面を構成することができることを示したのである。高次元 Culler-Shalen は強力で、[5] では任意の本質的曲面が理想点から構成されることが示された。これをきっかけに A-多項式 [1] の一般化、A-多様体に関する理論の発展なども期待されている。また、次元に関する考察が [6], [7] などで行われていて、 $n = 2$ の場合のきれいな一般化が与えられている。

・ 高次元指標多様体の計算

理論上は、高次元指標多様体も具体的に計算は可能であるが、一般には困難を極める。 $SL(2)$ の指標多様体が計算可能であるといったのは、Culler-Shalen の与えた、表現多様体自体の計算が (計算機などを使えば比較的) 可能であり、また表現多様体から指標多様体への標準射影が具体的に記述可能であることによる。これと同様に、高次元指標多様体に対しても、標準射影に対応した Trace 座標を構成し計算をすればよいように思われるし、実際それが素直なアイデアである。従って、まずは自由群の表現に関する Trace 座標を計算す

ることが重要であるが，自由群の $SL(3, \mathbb{C})$ -指標多様体に関しては，Lawton が結果を与えている [13]. この結果は今述べた，Trace 座標を与えたことに相当していて，特に，生成元個数が 2 の自由群に関しては Trace 座標や指標多様体の構造が具体的に記述されていて，例えば結び目群の $SL(3, \mathbb{C})$ -指標多様体の計算への手掛かりが与えられたように思える．実際，これを用いて，2015 年に Heusener-Muñoz-Porti は八の字結び目群の $SL(3, \mathbb{C})$ -指標多様体を計算した [11]. 彼らの計算は Lawton の Trace 座標を用いたものとなっている．なお，Muñoz-Porti[15] は八の字結び目の前にトーラス結び目群に関する仕事をしているが，これは Lawton の座標を用いたものではなく，比較的，代数幾何学的な表示を与えている．しかし，残念ながら具体例は現在，上で挙げたものしか知られていない．去年 5 月に，[11] による八の字結び目群の結果が与えられて以来，新たな結果は（筆者の知る限り）報告されていない．その流れもあってか，近年，指標多様体は，別の角度からもアプローチが試みられている．高次元 Teichmüller 理論で用いられている手法の，3 次元多様体群への応用である．深くは触れないが，Decorated Character Variety や Deformation Variety なるものを考えて，その対象と指標多様体の関係性から指標多様体の様相を研究するという手法である．具体的な計算例として，八の字結び目群の計算が [4] によって与えられており，また最近の話だが，7 月に似た手法により Whitehead 絡み目群の $SL(3, \mathbb{C})$ -表現の計算に関する仕事が arXiv に投稿されている [8]. (指標多様体は計算できていないと序文に書かれている.)

References

- [1] D. Cooper, M.Culler, H. Gillet, D. D. Long, and P. B. Shalen *Plane curve associated to character varieties of 3-manifolds* , Invent. Math. 118 (1994), no. 1, 47-84.
- [2] M. Culler and P. Shalen, *Varieties of group representations and splitting of 3-manifolds* , Annals of Math. 117 (1983) 109-146.
- [3] V. Fock and A. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (103):1-211, 2006.
- [4] E.Falbel, A. Guilloux, p. V. Koseleff, F. Rouillier, M. Thistlethwaite, *Character varieties for $SL(3, \mathbb{C})$:the figure eight knot* Exp. Math. 25(2016), no. 2, 219-235.
- [5] S. Friedl, T. Kitayama, M. Nagel, *Representation varieties detects essential surfaces*. arXiv: 1604.00584
- [6] M. P. M-Ferrer, J. Porti *Local coordinates for $SL(n, \mathbb{C})$ -character varieties of finite-volume hyperbolic 3-manifolds*. Ann. Math. Blaise Pascal 19(2012), no.1, 107-122
- [7] M. P. M-Ferrer, J. Porti *Twisted cohomology for hyperbolic three manifolds*. Osaka J. Math. 49 (2012), no. 3, 741-769.

- [8] A. Guilloux, P. Will, *On $SL(3, \mathbb{C})$ -representations of the Whitehead link group*, arXiv: 1607.01536
- [9] N. J. Hitchin, *Lie groups and Teichmüller space*, Topology 31(1992), no. 3, 449-473.
- [10] T. Hara, T. Kitayama, *Character varieties of higher dimensional representations and splittings of 3-manifolds*, arXiv:1410.4295
- [11] M. Heusener, V. Muñoz, J. Porti *The $SL(3, \mathbb{C})$ -character variety of the figure eight knot*. arXiv:1505.0445
- [12] 今吉 洋一, 谷口 雅彦, *タイヒミユラー空間論*, 日本評論社, 1989
- [13] S. Lawton, *$SL(3, \mathbb{C})$ -character varieties and \mathbb{RP}^2 -structures on a Trinion*, arXiv:14071003
- [14] A. Lubotzky and A. Magid, *Varieties of representations of finitely generated groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 58 (1985).
- [15] V. Muñoz, J. Porti *Geometry of the $SL(3, \mathbb{C})$ -character variety of torus knots*, Algebr. Geom. Topol. 16(2016), no. 1, 397-426.
- [16] 大鹿 健一, *離散群*, 岩波書店, 2008
- [17] J. Ratcliffe *Foundations of hyperbolic manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 149. Springer, New York, 2006.
- [18] P. Scott *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. 15(1983), no.5, 401-487
- [19] J-P. Serre *Trees*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980
- [20] P. Shalen *Representations of 3-manifold groups*, Handbook of geometric topology, 955-1044, North-Holland, Amsterdam, 2002
- [21] 谷口 雅彦, 松崎 克彦, *双曲的多様体とクライン群*, 日本評論社, 1993
- [22] W. Thurston *Three Dimensional Geometry and Topology*, Ann. of Math. Series, Princeton Univ. Press, 1983.

CAT(0) Cube Complex への群作用

京都大学理学研究科 修士課程 2 回生 山崎 美幸

群 G とその部分群 K に対し, エンドの数 $e(G, K)$ が定義され, 次の定理がある. [1]

Theorem 0.1. 群 G について, $e(G, K) > 1$ となる部分群 K を含むことと, “ある条件” を満たす $CAT(0)$ Cube Complex への作用が存在することは同値である.

今回は $CAT(0)$ Cube Complex と, 上の定理の証明で重要なポクセットについて述べる.

1 CAT(0) cube complex

まず *cube complex* とは, $\text{cube} (= [0, 1]^n)$ を等長写像で側面に沿って貼り合わせた CW-複体のことをいう. このセクションでは $CAT(0)$ cube complex と, その超平面と半空間の定義を行う.

Cube complex X の頂点 v のリンク $\text{link}(v)$ とは, 以下のように得られる単体的複体である: v を含む X の辺を $\text{link}(v)$ の頂点とする. v を含む X の cube があるときに, その cube が含む辺に対応する $\text{link}(v)$ の頂点を単体に拡張する. (図 1)

さらに単体的複体が *flag* であるとは, 全ての完全グラフに対してそれを 1-skeleton とする単体が存在するときをいう.

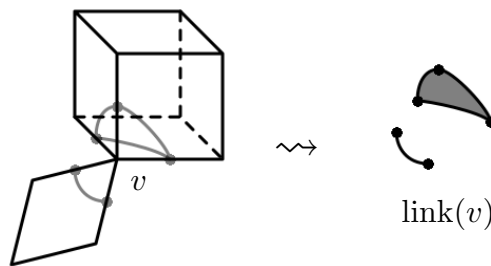


図 1 Cube complex の頂点 v のリンク $\text{link}(v)$

Definition 1.1. ($CAT(0)$ cube complex) 全ての頂点のリンクが flag な cube complex のことを *non-positively curved (NPC) cube complex* といい, 単連結な NPC cube complex のことを $CAT(0)$ cube complex という.

Cube complex の辺 e と f について, ある正方形の対辺となるときに $e \square f$ と書くと, \square は辺の集合上に同値関係を生成する. また n 次元の cube に対して, ある側面と平行で重心を通る $n - 1$ 次元の cube を *midcube* という.

Cube complex の辺の同値類 $[e]$ に対して, $[e]$ の辺と垂直に交わる midcubes の和集合を超平面という. 超平面は CAT(0) cube complex を丁度二つの連結成分に分割する. [2] CAT(0) cube complex の超平面で分割されたそれぞれを半空間と呼ぶ. (図 2)

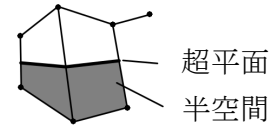


図 2 超平面と半空間

2 CAT(0) cube complex とポクセット

CAT(0) cube complex とポクセットは一方から一方を構成でき, ある種の有限性を仮定すれば双対性もある.[3] またこの構成方法によって, 群の作用も一方から一方へ自然に誘導される.

Definition 2.1. ポクセット Σ とは, 対合 $A \mapsto A^*$ を持つ半順序集合であって, 全ての要素 $A, B \in \Sigma$ について次の (a) と (b) を満たすもののことをいう.

- (a) $A \neq A^*, A$ と A^* は比較不能.
- (b) $A < B \Rightarrow B^* < A^*$.

ポクセットの代表例は, 図 3 のように円盤を 2 つに分割する曲線を数本とすることで得られる. このポクセットでは, 1 本の曲線で分割された連結成分それぞれが要素になっている.

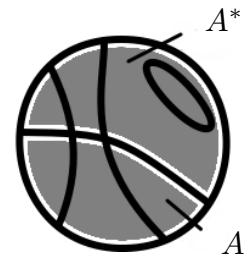


図 3 ポクセット

ポクセット Σ からは, グラフを経由して, 以下のように CAT(0) cube complex が構成される: グラフの頂点集合として

$$\{v : \Sigma \rightarrow \{0, 1\} \mid v(A) + v(A^*) = 1, v(A) = 1 \text{ かつ } A < B \Rightarrow v(B) = 1\}$$

をとる. (図 4 では, 頂点は台の共通部分に対応している.) 頂点 v と w について, 台が丁度要素 2 つ分だけ異なるときに辺で結ぶ. (図 4 では, 辺は円盤を分割した曲線を超えることに対応している.) このグラフの各連結成分について, n 次元の cube の 1-skelton が存在するときに n 次元の cube を貼りつけると, CAT(0) cube complex になる.

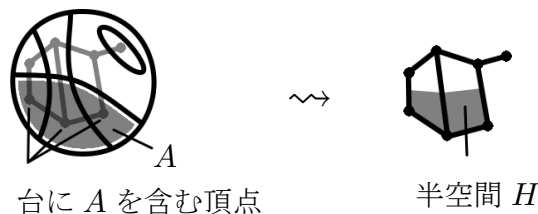


図 4 ポクセットから CAT(0) cube complex

CAT(0) cube complex からは, 半空間全体の集合に包含関係によって順序を入れることで具体的にポクセットが構成される.

図 4 のポクセットの要素 A と, CAT(0) cube complex の半空間 H との対応がポクセットの同型であるというのが, CAT(0) cube complex とポクセットの双対性である.

参考文献

- [1] Graham A. Niblo and Martin A. Roller, *Groups acting on cubes and Kazhdan's property(T)*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), no. 3, 693–699. MR 98k:20058
- [2] Michah Sageev, *Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes*, Proc. London Math. Soc. (3) 71 (1995), no. 3, 585–617. MR 97a:20062
- [3] Martin A. Roller, *Poc sets, median algebras and group actions. An extended study of Dunwoody's construction and Sageev's theorem*, Preprint, Univ. of Southampton, 1998.

Riemann 多様体上のパス空間での functional inequalities

笹森 拓也 (東北大学 D2)

Riemann 多様体 M 上の点 x を起点とするパス空間 $P_x(M)$ において、いつ諸々の functional inequality (以降は FI と略記) が成立するかについて述べる。

1 モチベーション

パス空間の無限次元解析は確率論における主要なテーマのひとつである。ある状態空間 (多様体, グラフ等) の中を時間が経過するにつれてランダムに動く量というものを数学的に定式化したものが確率過程であるが、確率過程を考えると $[0, 1]$ や $[0, \infty)$ から状態空間への連続写像全体の空間 (つまりパス空間) 上に確率測度を与えることは”同値”であるといえる。もっとも典型的な例は \mathbb{R}^n 上のパス空間に Wiener 測度を与えることである。このような確率空間を解析することと \mathbb{R}^n 上の Brown 運動とよばれるもっとも典型的な確率過程を解析することは本質的に同等である。さて、状態空間として”曲がった”空間を考えてパス空間を解析したら”曲がっていない”場合と比べてどうだろうかという問いは自然であろう。”パス空間を解析”と大雑把に述べたが何を”解析”というかは様々だがここでは FI とよばれるものに注目する。つまりどのようなパス空間ならば FI が成り立つかについて調べていく。当然それは状態空間がどうなっているかに依存する。つまり状態空間の幾何学的な情報がパス空間の解析に直に関わってくる。

2 記号や言葉の準備

M を n 次元連結完備 Riemann 多様体として点 $x \in M$ を固定する。また $\partial M = \emptyset$ とする。点 x を起点とする Brown 運動を $X = \{X_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ とする。今後、特に断らない限り M は確率論的完備であるとする。(厳密な定義は省略するがこれは M 上の Brown 運動が有限時間内に爆発しないことを仮定するというのである) すると x を起点とする $[0, 1]$ 上の連続関数全体の空間

$$P_x(M) := \{\gamma \in C([0, 1]; M) \mid \gamma(0) = x\}$$

には M 上の Brown 運動 X で $X_0 = x$ をみたすものから自然に定められる Brownian measure μ_x が入る。このとき確率空間 $(P_x(M), \mu_x)$ をパス空間という。パス空間 $P_x(M)$ 上の確率変数 $F: P_x(M) \rightarrow \mathbb{R}$ に対しその期待値を

$$E[F] := \int_{P_x(M)} F(\gamma) d\mu_x$$

で定める。またパス空間上の L^p ノルム ($1 \leq p < \infty$) を $\|\cdot\|_p$ とおく。すなわち

$$\begin{aligned} \|F\|_p &:= E[|F|^p]^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \\ \|F\|_\infty &:= \sup_{\gamma \in P_x(M)} |F(\gamma)| \end{aligned}$$

と置く.

FI には様々なタイプがあるがここでは対数 Sobolev 不等式と Poincaré 不等式について述べる. 対数 Sobolev 不等式は Ornstein-Uhlenbeck 半群の超縮小性 (hypercontractivity) と同値であり, Poincaré 不等式は Ornstein-Uhlenbeck 半群の生成作用素のスペクトルギャップの存在と同値であることが知られているため FI の中でも特に重要なもののひとつ (ふたつ) である. ある定数 $C > 0$ が存在して

$$E[F^2 \log F^2] \leq C \int_{P_x M} \langle DF, DF \rangle_H d\mu + \|F\|_2^2 \log \|F\|_2^2 \quad (F \in \mathcal{FC}_b^\infty)$$

が成り立つとき, 対数 Sobolev 不等式 (以降は LSI と略記) が成立するといいい,

$$\|F\|_2^2 - \|F\|_1^2 \leq C \int_{P_x M} \langle DF, DF \rangle_H d\mu \quad (F \in \mathcal{FC}_b^\infty)$$

が成り立つとき, Poincaré 不等式 (以降は PI と略記) が成立するという. ここで \mathcal{FC}_b^∞ は smooth bounded cylindrical function 全体の集合であり D は Malliavin 解析の意味での微分作用素であり $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ は Cameron-Martin 内積である. 詳細は省略する. 一般的に LSI から PI が導かれることが知られている.

3 Functional inequalities

パス空間上で FI が成り立つためには M の幾何学的な情報が重要となる.

定理. (1) $P_x(\mathbb{R}^n)$ 上で LSI が成り立つ. ([3] Gross,1975)

(2) M が連結 Lie 群ならば $P_x(M)$ 上で LSI が成り立つ. ([4] Gross,1992)

(3) M がコンパクトならば $P_x(M)$ 上で LSI が成り立つ. ([1] Aida-Elworthy,1995)

(4) M が非コンパクトでも Ricci 曲率が有界ならば $P_x(M)$ 上で LSI が成り立つ. ([5] Hsu,1997)

Ricci 曲率が非有界な場合はどうなるかという問いは自然であるが LSI や PI については (知る限りでは) 先行結果はない. しかし弱対数 Sobolev 不等式 (WLSI) や弱 Poincaré 不等式 (WPI) という”少し弱い”形の FI に関しては次の結果がある. WLSI と WPI の定義は省略する.

定理. (1) Ricci 曲率の発散スピードがある程度抑えられていれば $P_x(M)$ 上で WPI が成り立つ. ([6] Wang,2004)

(2) Ricci 曲率の発散スピードがある程度抑えられていれば $P_x(M)$ 上で WLSI が成り立つ. ([2] Chen-Wu,2014)

(3) M が球面对称性をもち, Ricci 曲率の発散スピードがある程度抑えられていれば $P_x(M)$ 上で WPI が成り立つ. (S.)

Wang は自身の結果を踏まえたうえで [6] で次の問題を提起した.

問題. M に確率論的完備性以外の曲率条件を一切課さずに $P_x(M)$ 上で WPI は成立するか.

Chen-Wu は [2] で Wang の結果を強めることに成功したが Ricci 曲率に関する仮定を完全に外すことはできなかった. 私は”良い”性質をもつ Riemann 多様体ならば Wang の予想を肯定的に解決できるのではないかと思い, Riemann 多様体が球面对称性をもち場合について取り組んだ. この場合は Wang の課した仮定よりも弱い仮定で WPI が成り立つが, やはり曲率条件を完全な外すことはできなかった. 現在は別のアプローチで問題の解決に取り組んでいる.

参考文献

- [1] S. Aida and K. D. Elworthy, *Differential calculus on path and loop spaces. I. Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 321 (1995), no. 1, 97-102.
- [2] X. Chen and B. Wu, *Functional inequality on path space over a non-compact Riemannian manifold*, J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 12, 6753-6779.
- [3] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975), no. 4, 1061-1083.
- [4] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities on Lie groups*, Illinois J. Math. 36 (1992), no. 3, 447-490.
- [5] E. P. Hsu, *Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces over Riemannian manifolds*, Comm. Math. Phys. 189 (1997), no. 1, 9-16.
- [6] F.-Y. Wang, *Weak Poincaré inequalities on path spaces*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 2, 89-108.

\mathbb{Z} -彩色可能絡み目の最小彩色数

松土 恵理 (日本大学大学院 総合基礎科学研究科 博士1年)

最も有名な結び目不変量の1つに Fox が導入した Fox n -彩色 (または単に n -彩色) がある [1].

L を絡み目, D を L の正則射影図式とする. 写像 $\gamma: \{\text{arcs of } D\} \rightarrow \mathbb{Z}$ が, D の任意の交点において, 上側を通る弧を a , 下側を通る弧を b と c としたとき, $2\gamma(a) = \gamma(b) + \gamma(c)$ を常に満たすとする. このとき, γ を D の \mathbb{Z} -彩色と呼ぶ. また全ての弧に対応する値が等しい \mathbb{Z} -彩色を自明な \mathbb{Z} -彩色という. 絡み目 L が, 非自明な \mathbb{Z} -彩色を許容する図式をもつとき, L は \mathbb{Z} -彩色可能という.

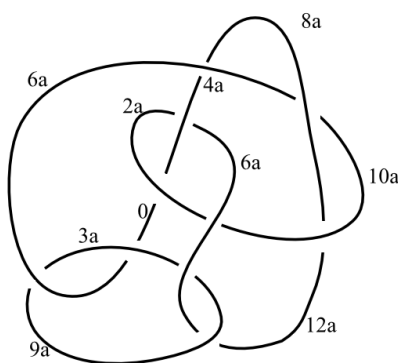


図 1: \mathbb{Z} -彩色の例

注意 1. 絡み目 L が \mathbb{Z} -彩色可能であるための必要十分条件は, L の行列式 $\det(L)$ が 0 であることが知られている. 一方で結び目の行列式は必ず奇数であることから任意の結び目は \mathbb{Z} -彩色可能ではない.

ある \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目 L に対して, L の図式が許容する自明でない \mathbb{Z} -彩色 γ の $\text{Im}(\gamma)$ の最小位数を最小彩色数と呼び, $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L)$ と表す.

この記号は, もともと, Harary-Kauffman が n -彩色に対して, 導入したものである [2].

まず以下のことは比較的容易にわかる.

命題 1. \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目 L が非分離ならば, $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L) \geq 4$ である.

一方で, 9 交点以下の \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目について, 実際に調べてみると, その最小彩色数は全て 4 であることが確かめられる.

特に, その \mathbb{Z} -彩色を観察すると, 以下の性質をみたす特徴的なものであることがわかる. そこで, 次のような定義を導入する.

定義 1. \mathbb{Z} -彩色可能な絡み目を L とし, γ を L の図式 D が許容する \mathbb{Z} -彩色とする. このとき, ある正の整数 d が存在して, D の各交点での上弧の γ の値と下弧の γ の値の差が d か 0 となっているとき, γ を単純 \mathbb{Z} -彩色という.

この単純 \mathbb{Z} -彩色を許容する絡み目について、以下を示すことができた。

定理 1. 絡み目 L が単純 \mathbb{Z} -彩色を許容するならば、 $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L) = 4$ である。

また、Fox 彩色については、佐藤 [3] により、5-彩色可能な結び目の最小彩色数は 4 であることが示されている。 \mathbb{Z} -彩色についても、次のように、5色で彩色可能ならば最小彩色数が 4 であることが示せた。

定理 2. 非分離な絡み目 L が 5 色による \mathbb{Z} -彩色を許容するならば、 $\text{mincol}_{\mathbb{Z}}(L) = 4$ である。

この定理は、5 色による \mathbb{Z} -彩色を分類し、それぞれについて絡み目図式と \mathbb{Z} -彩色を、局所的に変形していくことで証明される。

例えば、 $\text{Im}(\gamma) = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ となるような \mathbb{Z} -彩色 γ に対しては、最大値 5 の周辺で、図 2 のような 3 という弧の下側を通り、0 に変わるような交点が存在する。そこで図 2 のように変形を行う。

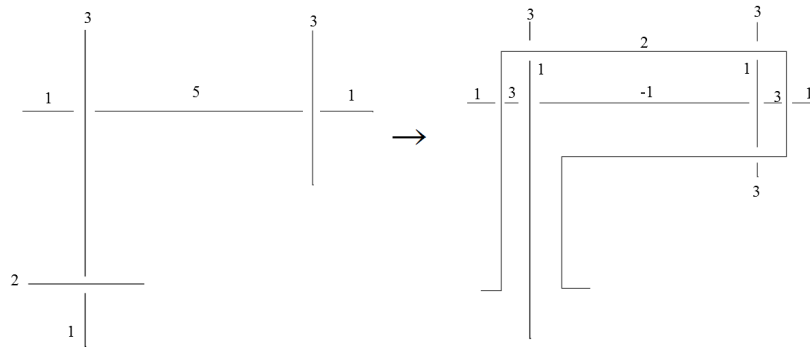


図 2:

このとき、現れる色は $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ となるが、 \mathbb{Z} -彩色をとりなおして、その値が $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ となるようにし、さらに変形を加えることで、単純 \mathbb{Z} -彩色の場合に帰着できる。他の場合も、同様にして単純 \mathbb{Z} -彩色の場合に帰着していく。

参考文献

- [1] R. H. Fox, A quick trip through knot theory, in *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, 120–167, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [2] F. Harary and L. H. Kauffman, Knots and graphs. I. Arc graphs and colorings, *Adv. in Appl. Math.* **22** (1999), no. 3, 312–337.
- [3] S. Satoh, 5-colored knot diagram with four colors, *Osaka J. Math.* **46** (2009), no. 4, 939–948.